Mathematische Optimierung II — Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Sommersemester 2004 — Sven Peyer

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:
Satz 1.7.6 der Vorlesung motiviert die folgende Definition:
Sei A eine rationale Matrix. Der *Chvátal-Rang* von A ist die kleinste Zahl t für die $\{x : Ax \leq b\}^{(t)} = \{x : Ax \leq b\}_I$ für jeden ganzzahligen Vektor b gilt. Der *starke Chvátal-Rang* von A ist der Chvátal-Rang der Matrix $[\, I \;\; -I \;\; A \;\; -A\,]^T$.

Sei A eine total unimodulare Matrix und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass der starke Chvátal-Rang von nA höchstens 1 ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 2:
Betrachten Sie das *Gewichtete Maximum Clique Problem* für ungerichtete Graphen aus Beispiel 1.1.3 der Vorlesung. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^{V \cup E}$ das Polytop, das durch die Ungleichungen in Beispiel 1.1.3 beschrieben wird, also

$$P: \quad \begin{array}{lll} y_e - x_i & \leq 0, & i \in e \in E \\ x_i + x_j - y_e & \leq 1, & e = ij \in E \\ 0 \leq x, y & \leq 1 & \end{array}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, Schnittebenen (*Cutting Planes*) für P zu ermitteln, d.h. gültige Ungleichungen für P_I. Seien dazu für einen Clique-Inzidenzvektor $(x, y) \in \mathbb{R}^{V \cup E}$ und für $S, T \subseteq V$ mit $S \cap T = \emptyset$

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i, \quad y(S) := \sum_{i,j \in S; i \neq j} y_{ij} \quad \text{und} \quad y(S,T) := \sum_{i \in S; j \in T} y_{ij}.$$

(a) Zeigen Sie, dass P voll-dimensional ist, d.h. $\dim(P) = n + \binom{n}{2}$.
(*Hinweis:* Finden Sie einen inneren Punkt von P.)

(b) Zeigen Sie, dass P_I voll-dimensional ist.

(c) Zeigen Sie $x(S) - y(S) \leq 1$ für alle Mengen $S \subseteq V$ mit $|S| = 3$.

(d) Sei $S \subseteq V$ und $\alpha \in \mathbb{N}$. Die Verallgemeinerung der Ungleichung aus (c) ist die *Clique-Ungleichung*

$$\alpha x(S) - y(S) \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}. \qquad (1)$$

Beweisen Sie, dass jede Clique-Ungleichung eine gültige Ungleichung für P_I ist.

(e) Die meisten der Clique-Ungleichungen aus (1) definieren sogar Facets von P_I: Für $S \subseteq V$ und $1 \leq \alpha \leq n-2$ wird die Ungleichung (1) für alle Inzidenzvektoren von Cliquen $C \subseteq V$ mit $|C \cap S| \in \{\alpha, \alpha+1\}$ mit Gleichheit erfüllt, und die Dimension der affinen Hülle dieser Inzidenzvektoren ist $\dim(P_I) - 1$, d.h. die affine Hülle ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{V \cup E}$.
Zeigen Sie diese Aussage für die Spezialfälle $S = V, \alpha = 1$ sowie $S \subseteq V, \alpha = 1$.

(f) Seien $S, T \subseteq V$ mit $S \cap T = \emptyset$. Die korrespondierende *Schnitt-Ungleichung* lautet

$$x(S) + y(S) + y(T) - y(S,T) \geq 0.$$

Beweisen Sie, dass jede Schnitt-Ungleichung eine gültige Ungleichung für P_I ist.

(14 Punkte)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass die in Kapitel 1.8 vorgestellte Branch-and-Bound Methode kein polynomieller Algorithmus ist, d.h. die Laufzeit der Branch-and-Bound Methode ist nicht polynomiell beschränkt durch die Größe ihres Inputs.

Hinweis:
Betrachten Sie das folgende ganzzahlige lineare Programm ILP_t für $t \in \mathbb{N}$:

$$\max\{\eta : 2^t\xi = (2^t+1)\eta;\ 0 \leq \xi \leq 2^t;\ \xi, \eta \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie, dass im k-ten Schritt der Branch-and-Bound Methode eines der paarweise disjunkten Polyeder die folgende Menge als Untermenge enthält:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \; : \; 2^t\xi = (2^t + 1)\eta;\; 0 \le \eta \le 2^t - k \right\}.$$

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 22. Juni 2004, vor der Vorlesung.