

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Belegen Sie die Aussage aus der Vorlesung, daß im allgemeinen in der Ungleichung

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \leq \min\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0, y \in \mathbb{Z}^m\}$$

keine Gleichheit gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 2:

Geben Sie ein Beispiel für folgende Bemerkung an:

Sind A , b oder c nicht rational, so gibt es im allgemeinen kein $x_0 \in \mathbb{Z}^n$ mit $c^T x_0 = \sup\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$, auch wenn es ein $\rho \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $Ax \leq b$ gilt: $c^T x \leq \rho$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $K_n = (V, E)$ der vollständige Graph, d.h. $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und $E = \binom{V}{2}$. Sei $c : E \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht wird eine Permutation $\pi \in S_n$, so daß $\sum_{i=1}^n c(\pi(i)\pi(i+1)) + c(\pi(n)\pi(1))$ minimal ist. Dieses Problem ist das bekannte *Traveling Salesman Problem*.

Zeigen Sie, daß jede zulässige Lösung des nachfolgend aufgestellten ILPs eineindeutig einem Hamiltonkreis entspricht. Interpretieren Sie insbesondere die Variablen $x_{i,k}$ und y_e und diskutieren Sie die gegebenen Ungleichungen.

b.w.

$$\begin{aligned}
\min \sum_{e \in E} c(e) y_e & \\
x_{1,1} &= 1 \\
\sum_{k=1}^n x_{i,k} &= 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \\
\sum_{i=1}^n x_{i,k} &= 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \\
\sum_{e \in E} y_e &= n \\
x_{i,k-1} + x_{j,k} - y_e &\leq 1, \quad e = (i, j) \in E, 2 \leq k \leq n \\
x_{i,n} + x_{1,1} - y_e &\leq 1, \quad e = (i, 1) \in E \\
0 \leq x_{i,k}, y_e &\leq 1 \quad i, k \in \{1, 2, \dots, n\}, e \in E \\
x_{i,k}, y_e &\in \mathbb{Z} \quad i, k \in \{1, 2, \dots, n\}, e \in E
\end{aligned}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^{V \cup E}$ affine Hülle der Inzidenzvektoren der Cliques der Größen 0, 1, 2 ist. Hier identifizieren wir ein Clique mit der Menge ihrer Knoten und Kanten.

(4 Punkte)

Abgabe: Freitag, 15. April 2005, vor der Vorlesung.