Mathematische Optimierung II — Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Sommersemester 2005 — Ulrich Brenner

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:
Beweisen Sie den Satz von König [1931] und Egerváry [1931]:
Die maximale Kardinalität eines Matchings in einem bipartiten Graphen ist gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenmenge, die mindestens einen Endpunkt jeder Kante enthält.
(Ein *Matching* M in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, $E \subseteq \binom{V}{2}$, ist eine Menge $M \subseteq E$ paarweise disjunkter Kanten, d.h. für $e, f \in M$ mit $e \neq f$ gilt: $e \cap f = \emptyset$.) (4 Punkte)

Aufgabe 2:
Beweisen Sie den Satz von König [1933]:
Die maximale Kardinalität einer unabhängigen Knotenmenge in einem bipartiten Graphen, für den jeder Knoten in mindestens einer Kante enthalten ist, ist gleich der minimalen Kardinalität einer Kantenmenge, die jeden Knoten überdeckt.
(Eine *unabhängige Knotenmenge* (*Coclique*) C in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, $E \subseteq \binom{V}{2}$, ist eine Menge $C \subseteq V$ paarweise nicht benachbarter Knoten, d.h. für $v, w \in C$ mit $v \neq w$ gilt: $\{v, w\} \notin E$.) (4 Punkte)

Aufgabe 3:
Es seien $\begin{bmatrix} A & a & a \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ d & d & B \end{bmatrix}$ total unimodulare Matrizen, wobei A und B Matrizen, a und d Spaltenvektoren, und b und c Zeilenvektoren geeigneter Dimension seien. Zeigen Sie, daß dann auch $\begin{bmatrix} A & ab \\ dc & B \end{bmatrix}$ total unimodular ist. (6 Punkte)

b.w.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, daß jede unimodulare Matrix durch unimodulare Transformation aus der Einheitsmatrix hervorgeht. (4 Punkte)

Aufgabe 5:
Es sei $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ so, daß $\mathrm{ggT}(\{c_1, c_2, ..., c_n\}) = 1$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass eine Matrix $U \in \mathbb{Z}^{(n-1)\times n}$ existiert, für die $A = [c\ U^T]^T$ unimodular ist, d.h. $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ und $|\det(A)| = 1$.

(ii) Begründen Sie, warum eine solche Matrix U in polynomieller Zeit gefunden werden kann.

Hinweis: Benutzen Sie den Euklidischen Algorithmus. (6 Punkte)

Abgabe: Freitag, 13. Mai 2005, vor der Vorlesung.