Sommersemester 2010 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. B. Korte | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Kombinatorik, Graphen, Matroide

5. Übung

1. Zeigen Sie, daß man jede natürliche Zahl als Summe von paarweise verschiedenen Fibonacci-Zahlen schreiben kann. (4 Punkte)

2. Berechnen Sie die erzeugende Funktion der harmonischen Zahlen (4 Punkte)
   Hinweis: Benutzen Sie die aus die Analysis bekannte Gleichung $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}z^n}{n} = \log(1+z)$.

3. Es sei $C_0 = 0$, und für $n > 0$ sei C_n die Zahl der Möglichkeiten, ein Produkt $a_1 a_2 \dots a_n$ zu klammern. Beispielsweise ist $C_4 = 5$, da es genau die 5 Möglichkeiten $((a_1a_2)a_3)a_4$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $a_1((a_2a_3)a_4)$, $a_1(a_2(a_3a_4))$, $(a_1(a_2a_3))a_4$ gibt.
   (a) Zeigen Sie, daß für $n > 1$ gilt: $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$.
   (b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $G(z) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n$.
   Hinweis: Betrachten Sie $G(z)^2$. (4 Punkte)

4. Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alle Möglichkeiten, in $2n$ Schritten von $(0,0)$ nach (n,n) zu laufen, wobei man in jedem Schritt von einem Punkt $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu einem Punkt $(i',j') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ laufen kann, falls gilt: $|i-i'|+|j-j'| = 1$ und $j' \geq i'$. Man kann also stets nur einen Schritt nach rechts oder nach oben machen und nie unter die Diagonale $x = y$ laufen. Es sei D_n die Zahl solcher Wege.
   (a) Zeigen Sie, daß $D_n = C_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, wobei C_n wie in Aufgabe 3 definiert sei.
   (b) Beweisen Sie $D_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ für $n \geq 1$. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 20.5.2010, **vor** der Vorlesung.

Weiterer Hinweis:
Das nächste Treffen der Mentorengruppe des Forschungsinstituts für Diskrete Mathematik findet am Dienstag, den 18. Mai um 18:00 Uhr im Konferenzraum des Arithmeums statt. Das Thema lautet „Datenstrukturen – AVL-Bäume“, alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.