Komplementärer Schlupf (Complementary slackness)

Theorem (Komplementärer Schlupf für Ungleichungen)

Seien $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von linearen Programmen. Dann sind für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^t y = c$ und $y \geq 0$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) x ist eine Optimallösung von $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und y ist eine Optimallösung von $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$.

(b) $c^t x = b^t y$.

(c) $y^t(b - Ax) = 0$.

$y = (y_1, \ldots, y_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$

$a_1, \ldots, a_m$ Zeilen von A: $\sum_{i=1}^{m} y_i (b_i - a_i^t x) = 0$

Theorem (Komplementärer Schlupf für Ungleichungen mit nicht-negativen Variablen)

Sei $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von linearen Programmen. Dann sind für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^t y \geq c$ und $y \geq 0$ die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(a) x ist eine Optimallösung von $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und y eine Optimallösung von $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$.

(b) $c^t x = b^t y$.

(c) $y^t(b - Ax) = 0$ und $x^t(A^t y - c) = 0$.

Korollar

Ein zulässiges lineares Programm $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ ist genau dann beschränkt, wenn c im konvexen Kegel ist, der von den Zeilen von A erzeugt wird.

Beweis: Das LP ist genau dann beschränkt, wenn das duale LP $\min\{b^t y : A^t y = c, y \geq 0\}$ zulässig ist. Das ist äquivalent dazu, das c in dem von den Zeilen von A erzeugten Kegel liegt. $\square$

Verschärfung durch komplementären Schlupf:

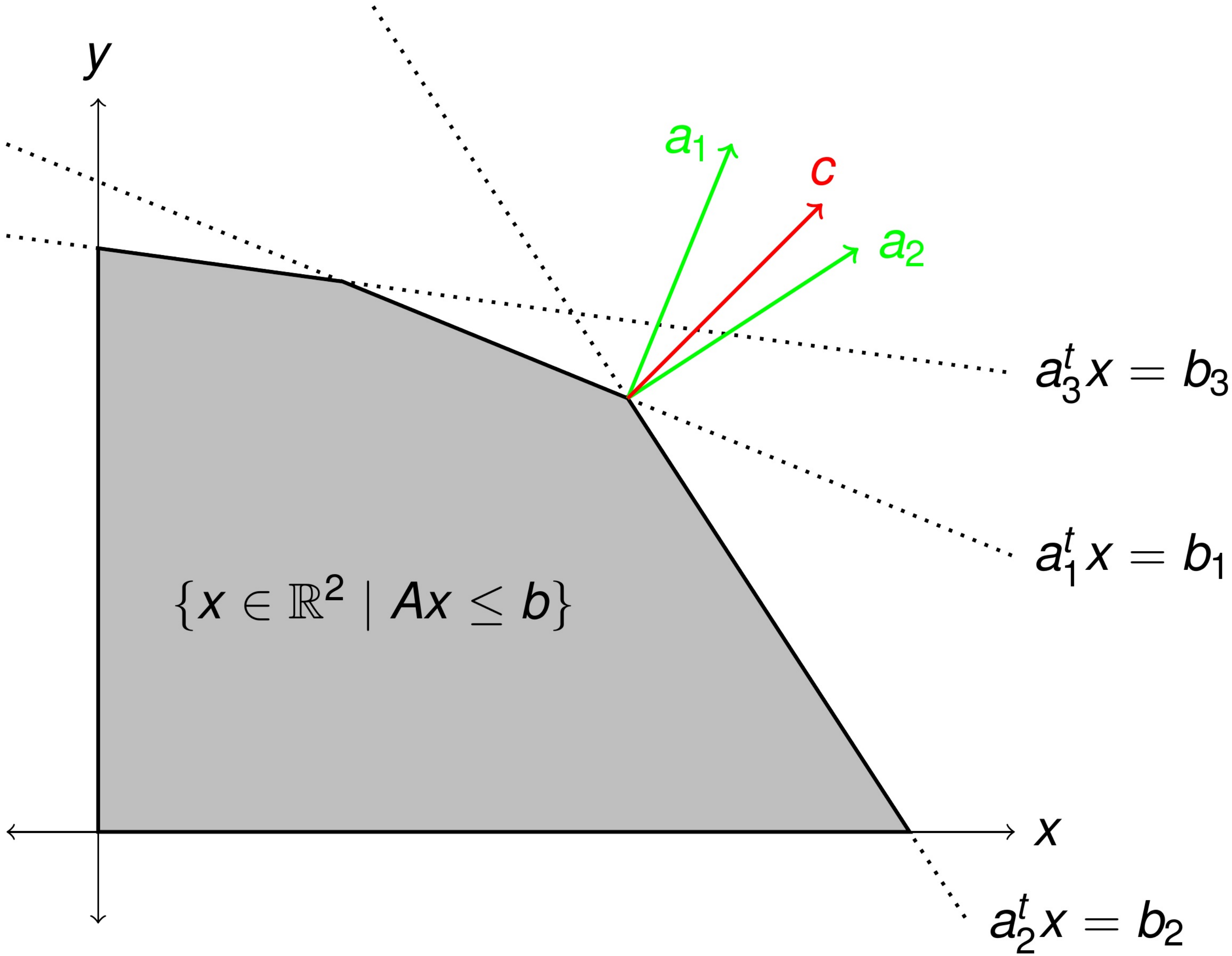
Korollar

Es sei x eine Optimallösung des LPs $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ eine Optimallösung des dualen LPs $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$. Es seien $a_1^t, \ldots, a_m^t$ die Zeilenvektoren von A. Dann liegt c in dem Kegel, der von den Zeilen a_i von A erzeugt wird, für die $a_i^t x = b_i$ gilt.

Beweis: Es gilt

$$c = \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,m\} : a_i^t x \underset{=}{\cancel{<}} b_i} y_i a_i \,,$$

da $y_i = 0$, falls $a_i^t x < b_i$ (für $i \in \{1, \ldots, m\}$). $\square$



y
a_1
c
a_2
$a_3^t x = b_3$
$a_1^t x = b_1$
$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$
x
$a_2^t x = b_2$

Theorem (Starker Komplementärer Schlupf, Strict Complementary Slackness)

Seien $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von linearer Programmen, die beide zulässig sind. Dann gilt für jede Ungleichung $a_i^t x \leq b_i$ in $Ax \leq b$ genau eine der folgenden Aussagen:

(a) Das primale LP $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ hat eine Optimallösung x^* mit $a_i^t x^* < b_i$.

(b) Das duale LP $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ hat eine Optimallösung y^* mit $y_i^* > 0$.

Beweis: komplementärer Schlupf: höchstens eine Aussage kann richtig sein

Annahme: Aussage (a) ist nicht erfüllt.

Sei: $\delta = \max\{c^t x : Ax \leq b\}$.

Dann:
$$\max \; -a_i^t x$$
$$Ax \leq b$$
$$-c^t x \leq -\delta$$

hat eine Optimallösung mit Wert höchstens $-b_i$

$\Rightarrow$ Das duale LP
$$\min \; b^t y - \delta u$$
$$A^t y - uc = -a_i$$
$$y \geq 0$$
$$u \geq 0$$

hat eine Optimallösung mit Wert $\leq -b_i$

$\Longrightarrow$ Es gibt $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$,

$u \geq 0$, $y^t A - u c^t = -a_i^t$ und $y^t b - u d \leq -b_i$

Sei $\tilde{y} = y + e_i$ (e_i := i-ter Einheitsvektor)

Falls $u = 0$, dann $\tilde{y}^t A = y^t A + a_i = 0$ und

$\tilde{y}^t b = y^t b + b_i \leq 0$

$\Longrightarrow$ Falls y^* eine optimale Duallösung,

dann ist $y^* + \tilde{y}$ auch eine Optimallösung.

und hat einen positiven i-ten Eintrag.

Falls $u > 0$, dann ist $\frac{1}{u}\tilde{y}$ eine Optimallösung

(weil $\frac{1}{u}\tilde{y}^t A = \frac{1}{u} y^t A + \frac{1}{u} a_i^t = c$ und $\frac{1}{u}\tilde{y}^t b = \frac{1}{u} y^t b + \frac{1}{u} b_i \leq d$)

und hat einen positiven ersten Eintrag. $\square$

Theorem

Seien $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von LPs, die beide zulässig sind. Dann gibt es Optimallösungen x^* und y^* der LPs, sodass für jede Ungleichung $a_i^t x \leq b_i$ in $Ax \leq b$ entweder $a_i^t x^* < b_i$ oder $y_i^* > 0$ gilt.

Beweis: Nach dem vorigen Theorem gibt es für jede Ungleichung $a_i^t x \leq b_i$ ein Lösungspaar $x^{(i)}, y^{(i)}$ mit $a_i^t x^{(i)} < b_i$ oder $y_i^{(i)} > 0$.

$\Rightarrow x^* := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)}$ und $y^* := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^{(i)}$ haben die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Anwendung: Das Max-Flow-Problem

MAXIMUM-FLOW-PROBLEM

Eingabe: Ein gerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, Knoten $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$.

Aufgabe: Finde einen s-t-Fluss $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit maximalem Wert.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_{e \in \delta^+_G(s)} x_e - \sum_{e \in \delta^-_G(s)} x_e & & & \\
\text{s.t.} & x_e & \geq & 0 & \text{für } e \in E(G) \\
 & x_e & \leq & u(e) & \text{für } e \in E(G) \\
 & \sum_{e \in \delta^+_G(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-_G(v)} x_e & = & 0 & \text{für } v \in V(G) \setminus \{s, t\}
\end{array}
$$

Das Max-Flow-Problem

Annahme: Keine Kanten eingehenden Kanten nach s oder ausgehende Kanten aus t.

LP-Formulierung:

$$\begin{array}{lrcll}
\max & \displaystyle\sum_{e\in\delta^+_G(s)} x_e & & & \\
\text{s.d.} & x_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
& x_e & \leq & u(e) & \text{for } e \in E(G) \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta^+_G(v)} x_e - \sum_{e\in\delta^-_G(v)} x_e & = & 0 & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s,t\}
\end{array}$$

Duales LP:

$$\begin{array}{lrcll}
\min & \displaystyle\sum_{e\in E(G)} u(e) y_e & & & \\
\text{s.d.} & y_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
& y_e + z_v - z_w & \geq & 0 & \text{for } e = (v,w) \in E(G), \{s,t\} \cap \{v,w\} = \emptyset \\
& y_e + z_v & \geq & 0 & \text{for } e = (v,t) \in E(G), v \neq s \\
& y_e - z_w & \geq & 1 & \text{for } e = (s,w) \in E(G), w \neq t \\
& y_e & \geq & 1 & \text{for } e = (s,t) \in E(G)
\end{array}$$

Das Max-Flow-Problem

Annahme: Keine Kanten eingehenden Kanten nach s oder ausgehende Kanten aus t.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{llcll}
\max & \displaystyle\sum_{e\in\delta^+_G(s)} x_e & & & \\
\text{s.d.} & x_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
 & x_e & \leq & u(e) & \text{for } e \in E(G) \\
 & \displaystyle\sum_{e\in\delta^+_G(v)} x_e - \sum_{e\in\delta^-_G(v)} x_e & = & 0 & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s,t\}
\end{array}
$$

Duales LP (vereinfacht):

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \displaystyle\sum_{e\in E(G)} u(e) y_e & & & \\
\text{s.t.} & y_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
 & y_e + z_v - z_w & \geq & 0 & \text{for } e = (v,w) \in E(G) \\
 & z_s & = & -1 & \\
 & z_t & = & 0 &
\end{array}
$$

Das Max-Flow Problem

Annahme: Keine Kanten eingehenden Kanten nach s oder ausgehende Kanten aus t.

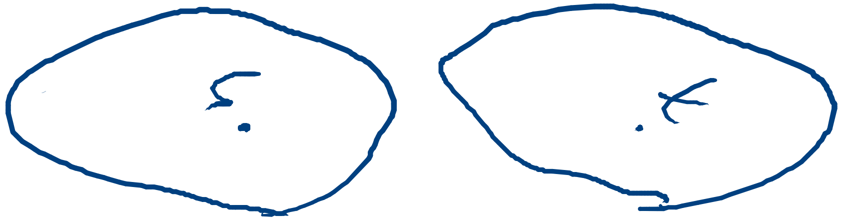
LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{llll}
\text{max} & \displaystyle\sum_{e \in \delta^+_G(s)} x_e & & \\
\text{s.d.} & x_e \geq 0 & & \text{for } e \in E(G) \\
& x_e \leq u(e) & & \text{for } e \in E(G) \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta^+_G(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-_G(v)} x_e = 0 & & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s, t\}
\end{array}
$$

Duales LP:

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{e \in E(G)} u(e) y_e & \\
\text{s.t.} & y_e \geq 0 & \text{for } e \in E(G) \\
& y_e + z_v - z_w \geq 0 & \text{for } e = (v, w) \in E(G) \\
& z_s = -1 & \\
& z_t = 0 &
\end{array}
$$

Das Max-Flow Problem



(Max-Flow-Min-Cut-Theorem)

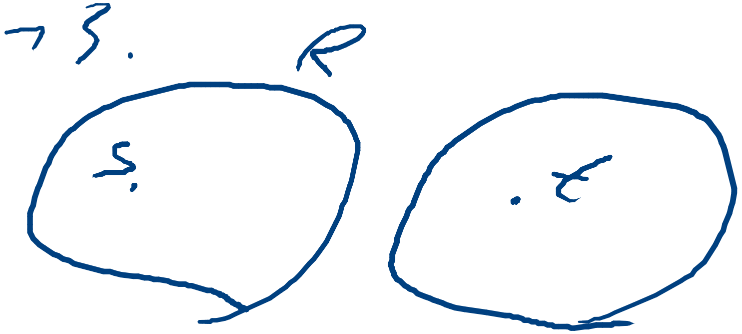
Sei G ein gerichteter Graphmit Kantenkapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$. Es seien $s, t \in V(G)$ zwie verschieden Knoten. Dann ist die minimale Kapazität aller s-t-Schnitte gleich dem maximalen Wert eines s-t-Flusses.

<u>Beweis:</u> Der Flusswert kann nie größer werden als die minimale Kapazität eines s-t-Schnitts (leichte Übung)

Sei $\hat{x}$ eine optimale primale Lösung,

und sei $\hat{y}, \hat{z}$ eine optimale Duallösung.

Sei: $R := \{ v \in V(G) : \hat{z}_v \leq -1 \}$.



$\Rightarrow s \in R, \; t \notin R$.

Falls $e = (v,w) \in \delta^+_G(R)$, dann

$\hat{z}_v < \hat{z}_w$, also $\hat{y}_e \geq \hat{z}_w - \hat{z}_v > 0$

komplementärer Schlupf: $x_e = u(e)$

Falls $e = (v,w) \in \delta^-(R)$, dann $\hat{z}_v > \hat{z}_w$

$\Rightarrow \hat{y}_e + \hat{z}_v - \hat{z}_w \geq \hat{z}_v - \hat{z}_w > 0, \underset{\text{kompl. Schlupf.}}{\Rightarrow} \hat{x}_e = 0$

$\Longrightarrow$ Der Flusswert ist genauso groß wie die Kapazität des Schnittes $\delta^+(R)$.

$\square$

Die Struktur der Polyeder

Proposition

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist die Menge

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b\}$$

ein Polyeder.

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Notation:

Die Menge $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : A\binom{x}{y} \leq b\}$ heißt **Projektion** von $\{z \in \mathbb{R}^{n+k} \mid Az \leq b\}$ auf $\mathbb{R}^n$.

Bilder von affin linearen Abbildungen

Korollar

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D \in \mathbb{R}^{k\times n}$ und $d \in \mathbb{R}^k$. Dann ist

$$\{y \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \text{ and } y = Dx + d\}$$

ein Polyeder.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\{y \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \text{ and } y = Dx + d\right\} \\
= &\left\{y \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & -I_k \\ -D & I_k \end{pmatrix} \binom{x}{y} \le \begin{pmatrix} b \\ -d \\ d \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt damit aus der vorigen Proposition. $\square$

Flächen

Definition

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein nicht-leeres Polyeder und $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Für $\delta := \max\{c^t x \mid x \in P\} < \infty$ heißt $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x = \delta\}$ **Stützhyperebene** (supporting hyperplane) von P.

(b) Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Fläche** (face) von P, falls $X = P$ oder falls es eine Stützhyperebene H von P mit $X = P \cap H$ gibt.

(c) Falls $\{x'\}$ eine Fläche von P ist, heißt x' **Ecke** (vertex) von P oder **Basislösung** (basic solution) des Systems $Ax \leq b$.