Korollar

Wenn das lineare Programm $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ zulässig und beschränkt ist und das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ spitz, dann gibt es eine Ecke x' von P, sodass $c^t x' = \max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$. $\square$

Kegel

Theorem (Carathéodorys Theorem)

Wenn $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von Vektoren und $c \in \text{cone}(X)$ ist, dann gibt es linear unabhängige Vektoren $a_1, \dots, a_k \in X$, sodass $c \in \text{cone}(\{a_1, \dots, a_k\})$.

Beweis: Sei $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq X$ ~~eine~~ inklusionweise minimal mit $c \in \text{cone}(\{a_1, \dots, a_k\})$.

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 : c = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$.

Behauptung: Die Vektoren $a_1, \dots, a_k$ sind linear unabhängig.

Falls nicht, dann gibt es Zahlen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ mit $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i a_i = 0$.

Können annehmen: Wenigstens ein γ_i ist positiv.
Wählte σ maximal, sodass $\lambda_i - \sigma\gamma_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.
Dann gilt für mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$: $\lambda_i - \sigma\gamma_i = 0$.

$\Rightarrow c = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \sigma\gamma_i) a_i$ ist eine Darstellung von c mit weniger Vektoren.

Widerspruch zur Minimalität der Menge $\{a_1, \dots, a_k\}$. $\square$

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Ungleichungen)

Es seien $a_1, \ldots, a_m, c \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und t die Dimension des Unterraums von $\mathbb{R}^n$, der von den Vektoren $a_1, \ldots, a_m, c$ aufgespannt wird (d.h. t ist der Rang der Matrix, deren Zeilen $a_1^t, \ldots, a_m^t, c^t$ sind). Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(a) c kann als nicht-negative Kombination von linear unabhängigen Vektoren aus $a_1^t, \ldots, a_m^t$ geschrieben werden.

(b) Es gibt eine Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t x = 0\}$ (für einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$), die $t - 1$ linear unabhängige Vektoren aus $a_1, \ldots, a_m$ enthält, sodass $a_i^t u \geq 0$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $c^t u < 0$.

Beweis: Offensichtlich können nicht beide Aussagen gleichzeitig gelten.

z.z.: Es gilt immer mindestens eine der Aussagen.

Falls $c \in \mathrm{cone}(\{a_1, \ldots, a_m\})$, folgt aus dem vorigen Theorem, dass c als nicht-negative Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_m\}$ geschrieben werden kann.

Falls $c \notin \text{cone}(\{a_1, \dots, a_m\})$, dann gibt es keinen Vektor $v \in \mathbb{R}^m$, $v \geq 0$ mit $c^t = v^t A$ (wobei A die Matrix sei, deren Zeilen $a_1, \dots, a_m$ sind).

$\overset{\text{Farkas}}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Vektor $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\bar{u} \geq 0$, $c^t\bar{u} < 0$

$\Rightarrow$ Das folgende LP hat eine zulässige Lösung:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t u \\ \text{s.t.} \quad & c^t u \leq -1 \\ & -c^t u \leq 1 \\ & -Au \leq 0 \end{aligned}$$

Und: Das LP ist beschränkt.

$\Rightarrow$ Es hat eine Optimallösung.

$\rightarrow$ Es gibt eine minimale Fläche

$F = \{u \in \mathbb{R}^4 : A'u = b'\}$, wobei $A'u \leq b'$

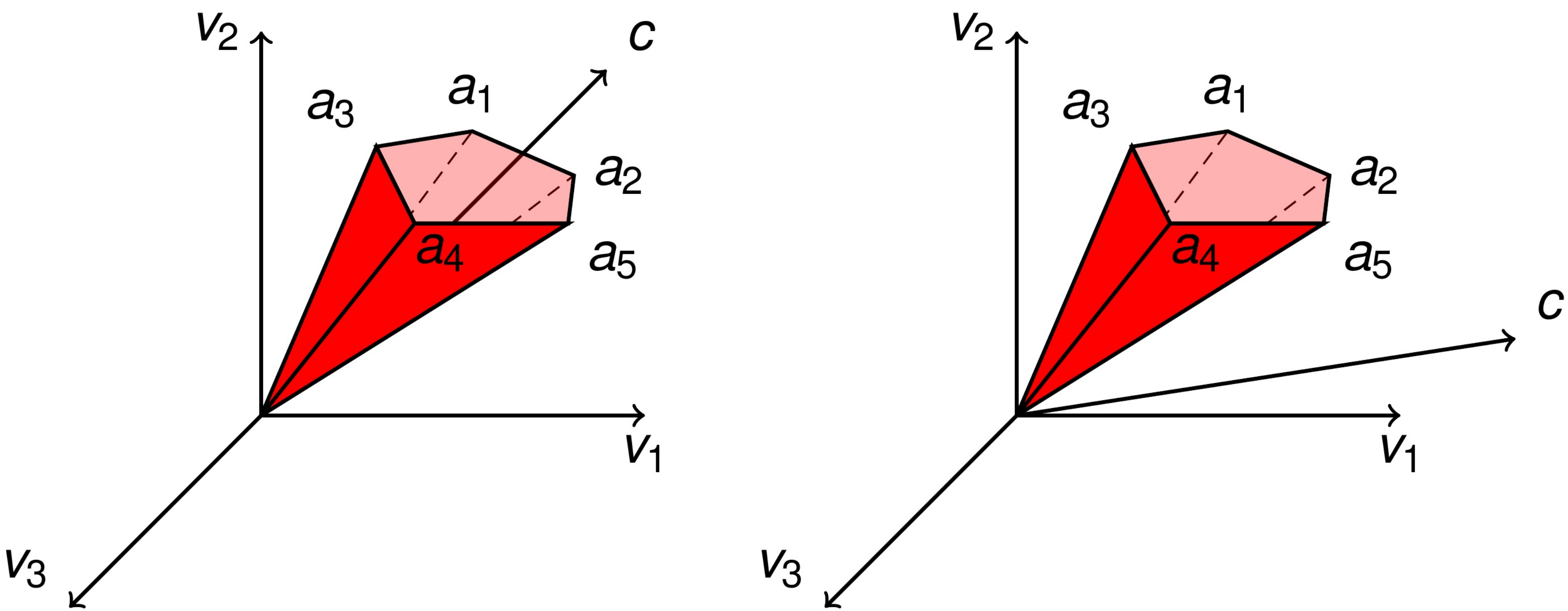
ein Teilsystem von $c^t u \leq -1, -c^t u \leq 1, Au \leq 0$

ist, das durch t linear unabhängige

Vektoren gegeben ist.

$\Rightarrow$ jeder Vektor in F erfüllt die Bedingung

aus (6). $\square$


v_2
c
a_3
a_1
a_2
a_4
a_5
v_1
v_3
v_2
a_3
a_1
a_2
a_4
a_5
c
v_1
v_3

Kegel

Theorem (Farkas-Minkowski-Weyl Theorem)

Ein Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$": Seien $a_1, .., a_m \in \mathbb{R}^n$.

z.z.: $\mathrm{cone}(\{a_1, ..., a_m\})$ ist polyedrisch.

Wir können annehmen: Die Vektoren

$a_1, ..., a_m$ spannen den $\mathbb{R}^n$ auf.

Betrachte die Menge $\mathcal{H}$ aller Halbräume

$H_u = \{x \in \mathbb{R}^n : u^t x \leq 0\}$, sodass für jedes

$H_u \in \mathcal{H}$ die folgenden Bedingungen erfüllt

sind:
- $\{a_1, ..., a_m\} \subseteq H_u$
- Es gibt $n-1$ linear unabhängige Vektoren $a_{i_1} ... a_{i_{n-1}}$ in $\{a_1, ..., a_m\}$ mit $u^t a_{i_j} = 0$ für $j \in \{1, .., n-1\}$.

Nach dem vorigen Theorem ist $\operatorname{cone}(\{a_1, \dots, a_m\})$ der Schnitt all dieser Halbräume in $\mathcal{H}$.

Und: $\mathcal{H}$ ist endlich. $\Longrightarrow$ $\operatorname{cone}(\{a_1 \dots, a_m\})$ kann als Schnitt endlich vieler Halbräume geschrieben werden, ist also ein Polyeder.

„$\Longrightarrow$": Sei $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ ein polyedrischer Kegel.

z.z.: C ist endlich erzeugt.

Sei: C_A der Kegel, der von den Zeilen von A erzeugt wird.

Andere Richtung: C_A ist ein polyedrischer Kegel.

$\Rightarrow$ Es gibt Vektoren $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}^n$ mit

$C_A = \{x \in \mathbb{R}^n : d_1^t x \leq 0, \dots, d_k^t x \leq 0\}$.

Sei: $C_B = \mathrm{cone}(\{d_1, \dots, d_k\})$

<u>Behauptung</u>: $C = C_B$.

Beweis der Behauptung:

„$C_B \subseteq C$": Jeder Zeilenvektor von A ist in

C_A enthalten. $\Rightarrow$ $Ad_i \leq 0$ für alle

$i \in \{1 \dots k\}$. $\Rightarrow$ $d_i \in C$ $(i \in \{1, \dots, k\})$

$\Rightarrow$ $C_B \subseteq C$.

„$C \subseteq C_B$": Annahme: Es gibt ein $y \in C \setminus C_B$.

C_B ist endlich erzeugt, also polyedrisch.

$\Rightarrow$ Es gibt $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u^t d_i \leq 0$ (für $i = 1, \dots, k$) und $u^t y > 0$.

$\Rightarrow u \in C_A \Rightarrow u^t x \leq 0$ für alle $x \in C$

Widerspruch zu $u^t y > 0$ und $y \in C$. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$S^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : x^t y \leq 0$ für alle $y \in S\}$

<u>Polarkegel</u> von S.

Wenn $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ ein polyedrischer Kegel ist, dann wird C° von den Zeilen von A erzeugt (Übung).

Wir haben also gerade für polyedrische Kegel C gezeigt: $C^{\circ\circ} = C$.

Polytope

Polytope

Theorem

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Polytop, wenn es die konvexe Hülle von einer endlichen Menge von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis: "$\Rightarrow$:"
Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$ ein Polytop.
Schreibe X als $X = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \binom{x}{1} \in C\right\}$, wobei

$\binom{x}{0} \in C$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda \geq 0, Ax - \lambda b \leq 0 \right\}.$$

$Ax \leq 0$

$\hat{x} \in X: A\hat{x} \leq b$

$\Rightarrow$ C ist ein polyedrischer Kegel.
$\Rightarrow$ C wird erzeugt von endlich vielen Vektoren $\binom{x_1}{\lambda_1}, \ldots, \binom{x_k}{\lambda_k}$. $=$ $\Rightarrow A(\hat{x} + k \cdot x) \leq b$
X ist beschränkt $\Rightarrow$ C kann keinen Vektor $\binom{x}{\lambda}$ mit $(x \neq 0$ und $\lambda \leq 0)$ enthalten.
$\Rightarrow$ Können annehmen: alle λ_i sind positiv (für $i \in \{1, \ldots, k\}$). $\Rightarrow \hat{x} + kx \in X$
Mit Skalierung können wir annehmen: $\lambda_i = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. für alle $k \geq 0$.
$\Rightarrow$

$$x \in X \Leftrightarrow \exists \mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0 : \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \mu_k \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow X = \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_k\})$.