Theorem

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ein Polyeder mit $\text{rank}(A) = m < n$. Dann ist ein Vektor $x' \in P$ genau dann eine Ecke von P, wenn er ein zulässige Basislösung ist.

Theorem

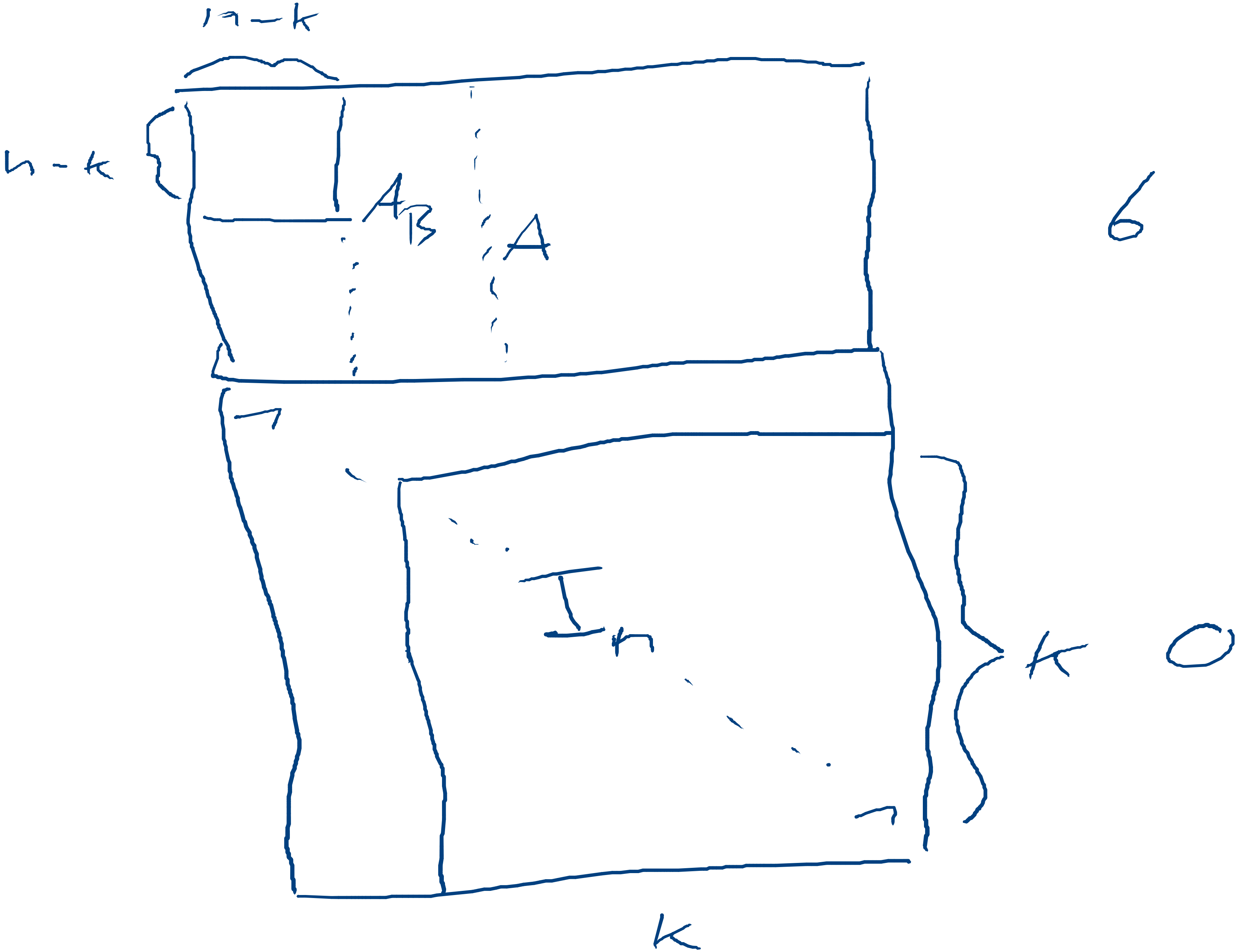
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ein Polyeder mit $\text{rank}(A) = m < n$. Dann ist ein Vektor $x' \in P$ genau dann eine Ecke von P, wenn er ein zulässige Basislösung ist.

Beweis: Der Vektor x' ist genau dann eine Ecke von P, wenn er alle Ungleichungen der folgendes Systems erfüllt und davon n linear unabhängige mit Gleichheit:

$$\begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ -Ax & \leq & -b \\ -I_n x & \leq & 0 \end{array}$$

Das ist genau dann der Fall, wenn $x' \geq 0$, $Ax' = b$ und $x'_N = 0$ für eine Menge $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|N| = n - m$, sodass mit $B = \{1, \ldots, n\} \setminus N$ die Matrix A_B vollen Rang hat. Das ist äquivalent dazu, eine zulässige Basislösung zu sein. $\square$

$$\begin{array}{cc|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{I_n} & 0 \end{array}$$



n-k
n-k
A_B
A
6
I_n
K
0
k

Simplex Algorithm: Example I

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
s.t. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Simplex Algorithm: Example I

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
s.t. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Initial basis: $\{3, 4, 5\}$. $\quad \Rightarrow \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Simplex Algorithm: Example I

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
s.t. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Initial basis: $\{3, 4, 5\}$. $\quad \Rightarrow \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Simplex tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

Simplex Algorithm: Example I

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
s.t. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Initial basis: $\{3, 4, 5\}$. $\Rightarrow$ $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Simplex tableau:

$$
\begin{array}{rclcrcr}
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

Recent solution: $(0, 0, 1, 3, 2)$

Simplex Algorithm: Example I

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

Increase exactly one of the non-basic variables with positive coefficient in the objective function.

Simplex Algorithm: Example I

$$
\begin{array}{rclllll}
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

Increase exactly one of the non-basic variables with positive coefficient in the objective function.

We choose x_2. How much can we increase it?

Simplex Algorithm: Example I

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Increase exactly one of the non-basic variables with positive coefficient in the objective function.
We choose x_2. How much can we increase it?

Constraints:
$x_3 = 1 + x_1 - x_2$: x_2 cannot get larger than 1.
$x_4 = 3 - x_1$: no constraint on x_2.
$x_5 = 2 \quad - x_2$: x_2 cannot get larger than 2.

Simplex Algorithm: Example I

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Increase exactly one of the non-basic variables with positive coefficient in the objective function.
We choose x_2. How much can we increase it?

Constraints:
$x_3 = 1 + x_1 - x_2$: x_2 cannot get larger than 1.
$x_4 = 3 - x_1$: no constraint on x_2.
$x_5 = 2 \quad - x_2$: x_2 cannot get larger than 2.

Strictest constraint: $x_3 = 1 + x_1 - x_2$
$\Rightarrow$ Replace 3 by 2 in B.

Simplex Algorithm: Example I

First tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

Replace 3 by 2 in the basis B: $B = \{2, 4, 5\}$:

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$.

Second tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\
\hline
z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3
\end{array}
$$

Simplex Algorithm: Example I

First tableau:

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Replace 3 by 2 in the basis B: $B = \{2, 4, 5\}$:

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$.

Second tableau:

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\ \hline z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3 \end{array}$$

Recent solution: $(0, 1, 0, 3, 1)$

Simplex Algorithm: Example I

Second tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\
\hline
z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3
\end{array}
$$

Simplex Algorithm: Example I

Second tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\
\hline
z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3
\end{array}
$$

Only one candidate: x_1

Simplex Algorithm: Example I

Second tableau:

$$\begin{array}{rclclcl} x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\ \hline z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3 \end{array}$$

Only one candidate: x_1

$x_5 = 1 - x_1 + x_3$ is critical. Replace 5 by 1 in B: $B = \{1, 2, 4\}$.

$x_1 = 1 + x_3 - x_5$.

Third tableau:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\ x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\ x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\ \hline z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5 \end{array}$$

Simplex Algorithm: Example I

Second tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\
\hline
z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3
\end{array}
$$

Only one candidate: x_1

$x_5 = 1 - x_1 + x_3$ is critical. Replace 5 by 1 in B: $B = \{1, 2, 4\}$.

$x_1 = 1 + x_3 - x_5$.

Third tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\
x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\
\hline
z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5
\end{array}
$$

Recent solution: $x = (1, 2, 0, 2, 0)$.

Simplex Algorithm: Example I

Third tableau:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\
x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\
\hline
z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5
\end{array}
$$

Simplex Algorithm: Example I

Third tableau:

$$\begin{array}{rclclcl}
x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\
x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\
\hline
z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5
\end{array}$$

Only one candidate: x_3

$x_4 = 2 - x_3 + x_5$ is critical. Replace 4 by 3 in B: $B = \{1, 2, 3\}$.

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

Fourth tableau:

$$\begin{array}{rclclcl}
x_1 & = & 3 & - & x_4 & & \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\
x_3 & = & 2 & - & x_4 & + & x_5 \\
\hline
z & = & 5 & - & x_4 & - & x_5
\end{array}$$

Simplex Algorithm: Example I

Third tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\ x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\ x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\ \hline z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5 \end{array}$$

Only one candidate: x_3

$x_4 = 2 - x_3 + x_5$ is critical. Replace 4 by 3 in B: $B = \{1, 2, 3\}$.

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

Fourth tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 3 & - & x_4 & & \\ x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\ x_3 & = & 2 & - & x_4 & + & x_5 \\ \hline z & = & 5 & - & x_4 & - & x_5 \end{array}$$

Recent solution: $x = (3, 2, 2, 0, 0)$.

Simplex Algorithm: Example I

Fourth tableau:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & 3 & - & x_4 & & \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\
x_3 & = & 2 & - & x_4 & + & x_5 \\
\hline
z & = & 5 & - & x_4 & - & x_5
\end{array}
$$

Recent solution: $x = (3, 2, 2, 0, 0)$.

Simplex Algorithm: Example I

Fourth tableau:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & 3 & - & x_4 & & \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_5 \\
x_3 & = & 2 & - & x_4 & + & x_5 \\
\hline
z & = & 5 & - & x_4 & - & x_5
\end{array}
$$

Recent solution: $x = (3, 2, 2, 0, 0)$.

This is an optimum solution!

Second Example: Unboundedness

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 \\
s.t. & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Initial basis: B={3,4}
Simplex Tableau:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_3 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\
x_4 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & &
\end{array}$$

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & x_1 & & & & & & & & \\
s.t. & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Initial basis: B={3,4}
Simplex Tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\
x_4 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & &
\end{array}$$

Recent solution: $x = (0, 0, 1, 2)$.

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

First Tableau:

$$
\begin{array}{rclclcl}
x_3 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\
x_4 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & &
\end{array}
$$

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

First Tableau:

$$\begin{array}{rclllll} x_3 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\ x_4 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & & \end{array}$$

Only one candidate: x_1. $x_3 = 1 - x_1 + x_2$ is critical. Replace 3 by 1 in B: $B = \{1, 4\}$.
$x_1 = 1 + x_2 - x_3$.
Second Tableau:

$$\begin{array}{rclllll} x_1 & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_4 & = & 3 & & & - & x_3 \\ \hline z & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

First Tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\ x_4 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & & \end{array}$$

Only one candidate: x_1. $x_3 = 1 - x_1 + x_2$ is critical. Replace 3 by 1 in B: $B = \{1, 4\}$.

$x_1 = 1 + x_2 - x_3$.

Second Tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_4 & = & 3 & & & - & x_3 \\ \hline z & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Recent solution:

$x = (1, 0, 0, 3)$.

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

Second Tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_4 & = & 3 & & & - & x_3 \\ \hline z & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Only one candidate: x_2.

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

Second Tableau:

$$\begin{array}{rclcl}
x_1 & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \\
x_4 & = & 3 & & & - & x_3 \\
\hline
z & = & 1 & + & x_2 & - & x_3
\end{array}$$

Only one candidate: x_2. No constraint for it!

Simplex Algorithm: Example II: Unboundedness

Second Tableau:

$$
\begin{array}{rclcl}
x_1 & = & 1 + x_2 & - & x_3 \\
x_4 & = & 3 & - & x_3 \\
\hline
z & = & 1 + x_2 & - & x_3
\end{array}
$$

Only one candidate: x_2. No constraint for it!

$\Rightarrow$ The LP is unbounded

Second Example: Degeneracy

Simplex Algorithm: Example III: Degeneracy

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & & & x_2 & & & & & & \\ s.t. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Initial basis: $B = \{3, 4\}$

Simplex Tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & & & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & & & & & x_2 \end{array}$$

Simplex Algorithm: Example III: Degeneracy

$$\begin{array}{llllllllll} \max & & & x_2 & & & & & & \\ s.t. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Initial basis: $B = \{3, 4\}$

Simplex Tableau:

$$\begin{array}{rclll} x_3 & = & & x_1 & - \; x_2 \\ x_4 & = & 2 & - \; x_1 & \\ \hline z & = & & & x_2 \end{array}$$

$\Rightarrow x = (0, 0, 0, 2)$: degenerated solution.

Simplex Algorithm: Example III: Degeneracy

First Tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & & & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & & & & & x_2 \end{array}$$

Want to increase x_2. $x_3 = x_1 - x_2$ is critical. Replace 3 by 2 in B:
$B = \{2, 4\}$.
$x_2 = x_1 - x_3$. We will replace 3 by 2 in the basis.
But: We cannot increase x_2.
Second Tableau:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & & & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & & & x_1 & - & x_3 \end{array}$$

Recent solution: $x = (0, 0, 0, 2)$.

Simplex Algorithm: Example III: Degeneracy

Second Tableau:

$$\begin{array}{rclclcl} x_2 & = & & & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & & & x_1 & - & x_3 \end{array}$$

Increase x_1. $x_4 = 2 - x_1$ is critical. $x_1 = 2 - x_4$. New base $B = \{1, 2, 0, 0\}$.

Third Tableau:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 2 & & & - & x_4 \\ x_2 & = & 2 & - & x_3 & - & x_4 \\ \hline z & = & 2 & - & x_3 & - & x_4 \end{array}$$

Optimum solution: $x = (2, 2, 0, 0)$.

Das Simplex-Tableau

Für eine zulässige Basis B ist das **Simplex-Tableau** ein System $T(B)$ von $m+1$ linearen Gleichungen mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und z der Form

$$\begin{array}{cccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

und den folgenden Eigenschaften:

- x_B ist der Vektor der Basisvariablen, $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$, und x_N ist der Vektor der Nicht-Basisvariablen,
- $T(B)$ hat die gleiche Lösungsmenge wie das System $Ax = b$, $z = c^t x$.
- p ist ein Vektor der Länge m, Q ist eine $m \times (n-m)$-Matrix, r ist ein Vektor der Länge $n-m$, und $z_0 \in \mathbb{R}$.

Das Simplex-Tableau

Simplex-Tableau $T(B)$:

$$\begin{array}{ccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

Beachte, dass p durch B indiziert ist (und entsprechend für r). Insbesondere sind die Zeilen von Q durch B indiziert und die Spalten durch N. Bezeichne die Einträge von Q mit q_{ij} (für $i \in B$ und $j \in N$).

Das Simplex-Tableau

LP: $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Simplex-Tableau $T(B)$:

$$\begin{array}{cccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

Wichtige Eigenschaften:

- $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lösung von $Ax = b$, wenn x_B und x_N eine Lösung von $x_b = p + Qx_N$ ist.
- Für jeder Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ gilt $c^t x = z_0 + r^t x_N$.

Das Simplex-Tableau

Lemma:

Für jede zulässige Basis B gibt es ein Simplex-Tableau $T(B)$.

Das Simplex-Tableau

Lemma:

Für jede zulässige Basis B gibt es ein Simplex-Tableau $T(B)$.

$A_B x_B + A_N x_N = b$

$Ax = b, \quad c^t x = z$

$$\begin{array}{l} x_B = p + Q x_N \\ \hline z = z_0 + r^t x_N \end{array}$$

Beweis: Setze

- $p = A_B^{-1} b$,
- $Q = -A_B^{-1} A_N$,
- $r = c_N - (c_B^t A_B^{-1} A_N)^t$, und
- $z_0 = c_B^t A_B^{-1} b$.

Dann gilt:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \quad \Leftrightarrow \quad A_B x_B = b - A_N x_N \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b.$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} z &= c_B^t A_B^{-1} b + (c_N^t - (c_B^t A_B^{-1} A_N)) x_N \\ &= c_B^t A_B^{-1}(b - A_N x_N) + c_N^t x_N = c_B^t A_B^{-1} A_B x_B + c_N^t x_N \\ &= c_B^t x_B + c_N^t x_N = c^t x. \end{aligned}$$

□

Optimalitätskriterium:

r heißt auch Vektor der reduzierten Kosten.

Lemma

Sei $T(B)$:

$$\begin{array}{cccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

ein Simplextableau für eine zulässige Basis B. Falls $r \leq 0$, dann ist die Basislösung zu B optimal.

Optimalitätskriterium:

Lemma

Sei $T(B)$:

$$\begin{array}{cccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

ein Simplextableau für eine zulässige Basis B. Falls $r \leq 0$, dann ist die Basislösung zu B optimal.

Beweis: Sei x die Basislösung von B.
Wegen $x_N = 0$ gilt $c^t x = z_0 (= c_B^t A_B^{-1} b)$.
Wenn x^* irgendeine zulässige Lösung mit Wert $z^* = c^t x^*$ ist, dann bilden x^* und z^* auch eine Lösung von $T(B)$, und es gilt (wegen $r \leq 0$ und $x_N^* \geq 0$):

$$z^* = z_0 + r^t x_N^* \leq z_0 = c^t x.$$