Dualität

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Ziel: Finde eine obere Schranke für den Wert einer Optimallösung.

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Allgemeiner Ansatz: Finde Zahlen $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$12x_1 + 10x_2 = u_1 \cdot (4x_1 + 2x_2) + u_2 \cdot (8x_1 + 12x_2) + u_3 \cdot (2x_1 - 3x_2).$$

$\Rightarrow$ $5u_1 + 7u_2 + u_3$ ist eine obere Schranke für den Wert von jeder Lösung von (P).

$\Rightarrow$ Wähle u_1, u_2, u_3 so, dass $5u_1 + 7u_2 + u_3$ minimiert wird.

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
(P) & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
(D) & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
 & \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
 & & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
 & & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
& \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
& & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
& & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & 1u_3 & & \\
& \text{s.d.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
& & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
& & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
& \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
& & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
& & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
 & \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
 & & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
 & & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Für das lineare Programm (P)

$$\begin{array}{rrcl} & \max c^t x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \end{array}$$

in Standard-Ungleichungsform ist das **duale lineare Programm (D)** definiert als

$$\begin{array}{rrcl} & \min b^t y & & \\ \text{s.t.} & A^t y & = & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

In diesem Zusammenhang heißt (P) dann auch **primales lineares Programm**.

Alle Arten von LPs lassen sich dualisieren, wenn man sie erst in Standard-Ungleichungsform schreibt

Schwache Dualität

Satz (Schwache Dualität):

Wenn die Ungleichungssysteme $Ax \leq b$ und $A^t y = c, y \geq 0$ beide eine Lösung haben, dann gilt

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b\} \leq \min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}.$$

Fourier-Motzkin-Elimination I

Ziel: Entscheide zu einem gegebenen System von Ungleichungen, ob es zulässig ist.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & & & + & 2z & \leq & 9 \\
2x & - & y & & & \leq & 5 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\
-2x & & & & & \leq & 4 \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Erster Schritt: Entferne die Variable x.

Fourier-Motzkin-Elimination II

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & & & + & 2z & \leq & 9 \\
2x & - & y & & & \leq & 5 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\
-2x & & & & & \leq & 4 \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & \leq & \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z \\
x & \leq & 3 & & & - & \frac{2}{3}z \\
x & \leq & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & \\
x & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\
x & \geq & -2 & & & & \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination III

$$\begin{array}{ccrcrcr}
x & \leq & \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z \\
x & \leq & 3 & & & - & \frac{2}{3}z \\
x & \leq & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & \\
x & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\
x & \geq & -2 & & & & \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Dieses System ist genau dann zulässig, wenn das folgende System eine Lösung hat:

$$\begin{array}{rcl}
\min\left\{\frac{10}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z, \quad 3 - \frac{2}{3}z, \quad \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y\right\} & \geq & \max\left\{-3 + 2y - z, \quad -2\right\} \\
2y + 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination IV

$$\begin{array}{rcl}\min\left\{\frac{10}{3}-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z,\quad 3-\frac{2}{3}z,\quad \frac{5}{2}+\frac{1}{2}y\right\} & \geq & \max\{-3+2y-z,\quad -2\}\\ 2y+2z & \leq & 7\end{array}$$

Dieses System kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
\frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z & \geq & -3 & + & 2y & - & z\\
\frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z & \geq & -2 & & & & \\
3 & & & - & \frac{2}{3}z & \geq & -3 & + & 2y & - & z\\
3 & & & - & \frac{2}{3}z & \geq & -2 & & & & \\
\frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & & \geq & -3 & + & 2y & - & z\\
\frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & & \geq & -2 & & & & \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7 & & & &
\end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination V

Umwandlung in Standardform:

$$\begin{array}{rcrcr}
\frac{8}{3}y & + & \frac{1}{3}z & \leq & \frac{19}{3} \\
\frac{2}{3}y & + & \frac{4}{3}z & \leq & \frac{16}{3} \\
\frac{8}{3}y & - & z & \leq & 6 \\
 & & \frac{2}{3}z & \leq & 5 \\
\frac{3}{2}y & - & z & \leq & \frac{11}{2} \\
-\frac{1}{2}y & & & \leq & \frac{9}{2} \\
2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Iteriere diese Schritte und entferne *alle* Variablen.

Fourier-Motzkin-Elimination VI

Eigenschaften des neuen Systems:

- Es gibt eine Variable weniger.
- Das neue System ist genau dann zulässig, wenn das alte es war.
- Jede Ungleichung im neuen System ist nicht-negative Linearkombination von Ungleichungen des alten Systems.

Lemma von Farkas

Theorem (Lemma von Farkas, allgemeinster Fall)

Für $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_2}$ hat genau eines der beiden folgenden System eine Lösung:

System 1:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array}$$

System 2:

$$\begin{array}{rcrcl} u^t A & + & v^t C & \geq & 0^t \\ u^t B & + & v^t D & = & 0^t \\ u & & & \geq & 0 \\ u^t a & + & v^t b & < & 0 \end{array}$$

Lemma von Farkas

Beweis:
Das erste System ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcr} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & \leq & b \\ -Cx & - & Dy & \leq & -b \\ -I_{n_1}x & & & \leq & 0 \end{array}$$

Lemma von Farkas für lineare Ungleichungen: Dieses System genau dann eine Lösung, wenn das folgende System keine Lösung hat:

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1^t A & + & u_2^t C & - & u_3^t C & - & u_4^t & = & 0^t \\ u_1^t B & + & u_2^t D & - & u_3^t D & & & = & 0^t \\ u_1^t a & + & u_2^t b & - & u_3^t b & & & < & 0 \\ u_1 & & & & & & & \geq & 0 \\ & & u_2 & & & & & \geq & 0 \\ & & & & u_3 & & & \geq & 0 \\ & & & & & & u_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Dieses ist äquivalent zum zweiten System des Theorems. $\square$