Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix mit Rang m. Dann gilt: A ist genau dann unimodular, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist. $\square$

Theorem (Hoffman und Kruskal)

Ein ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix mit Rang m. Dann gilt: A ist genau dann unimodular, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist. $\square$

Theorem (Hoffman und Kruskal)

Ein ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Beweis: A ist genau dann TU, wenn $[I_m \, A]$ unimodular ist.
Sei b ein ganzzahliger Vektor.
$\Rightarrow$ Die Ecken von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ sind genau dann ganzzahlig, wenn die Ecken von $\{z \in \mathbb{R}^{m+n} \mid [I_m \, A]z = b, z \geq 0\}$ ganzzahlig sind.
Die Aussage folgt aus dem vorigen Theorem. $\square$

Vollständige Unimodularität

Theorem

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann vollständig unimodular, wenn für alle ganzzahligen Vektoren b und c die Optima für beide Seiten der Dualitäts-Gleichung

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$$

von ganzahligen Vektoren angenommen wird (wenn beide Optima existieren).

Vollständige Unimodularität

Theorem

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann vollständig unimodular, wenn für alle ganzzahligen Vektoren b und c die Optima für beide Seiten der Dualitäts-Gleichung

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$$

von ganzahligen Vektoren angenommen wird (wenn beide Optima existieren).

Beweis: Folgt direkt aus Hoffmans and Kruskals Theorem. Denn A ist genau dann TU, wenn A^t TU ist. $\square$

Vollständige Unimodularität

Korollar

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn das Ungleichungssystem $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Vollständige Unimodularität

Korollar

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn das Ungleichungssystem $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Beweis:

“$\Rightarrow$:” Wenn A TU, dann ist A^t TU.
Hoffmans und Kruskals Theorem: $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$ wird für jeden Vekor b und jeden ganzzahligen Vektor c, für die das Minimum endlich ist, von einem ganzzahligen Vektor angenommen.
$\Rightarrow$ $Ax \leq b, x \geq 0$ ist für jeden Vektor b TDI.

Vollständige Unimodularität

Korollar

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn das Ungleichungssystem $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Beweis:
"$\Rightarrow$:" Wenn A TU, dann ist A^t TU.
Hoffmans und Kruskals Theorem: $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$ wird für jeden Vekor b und jeden ganzzahligen Vektor c, für die das Minimum endlich ist, von einem ganzzahligen Vektor angenommen.
$\Rightarrow$ $Ax \leq b, x \geq 0$ ist für jeden Vektor b TDI.

"$\Leftarrow$:" Es sei $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI.
$\Rightarrow$ Das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ist für jeden ganzzahligen Vektor b ganzzahlig.
Mit Hoffmans und Kruskals Theorem folgt, dass A TU ist. $\square$

Vollständige Unimodularität

Theorem (Ghoulia-Houri)

Ein Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ ist genau dann TU, wenn für es jede Menge $R \subseteq \{1,\dots,n\}$ Mengen R_1 und R_2 mit $R = R_1 \dot\cup R_2$ gibt, sodass für jedes $i \in \{1,\dots,m\}$ gilt:

$$\sum_{j\in R_1} a_{ij} - \sum_{j\in R_2} a_{ij} \in \{-1,0,1\}.$$

Vollständige Unimodularität

Beispiele: Inzidenzmatrizen

Die **Inzidenzmatrix** eines ungerichteten Graphen G ist die Matrix $A_G = (a_{v,e})_{\substack{v \in V(G) \\ e \in E(G)}}$ mit

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in e \\ 0, & \text{if } v \notin e \end{cases}$$

Die **Inzidenzmatrix** eines gerichteten Graphen G ist die Matrix $A_G = (a_{v,e})_{\substack{v \in V(G) \\ e \in E(G)}}$ mit

$$a_{v,(x,y)} = \begin{cases} -1, & \text{if } v = x \\ 1, & \text{if } v = y \\ 0, & \text{if } v \notin \{x, y\} \end{cases}$$

Vollständige Unimodularität

Theorem

Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen G ist genau dann TU, wenn G bipartit ist.

Theorem

Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen ist TU.