Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 21. Oktober, vor der Vorlesung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen konvex sind:

a) $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 2\}$

c) $\{(x_1, x_2) : x_2 - x_1^2 = 0\}$

d) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \geq x_1^2, x_1 + x_2 + x_3 \leq 6\}$

e) $\{(x_1, x_2) : x_1 = 1, |x_2| \leq 4\}$

f) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = |x_2|, x_1 \leq 4\}$

(3 Punkte)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$.
Wir definieren die **lineare Hülle lin**(S) und die **affine Hülle aff**(S) von S als
$\text{lin}(S) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t | t \geq 0; x_1, \ldots, x_t \in S; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}\}$.
$\text{aff}(S) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t | t \geq 1; x_1, \ldots, x_t \in S; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}; \lambda_1 + \ldots + \lambda_t = 1\}$.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen und zeichnen Sie für $S = \{(1, 1), (1, -1)\} \subseteq \mathbb{K}^2$ die Mengen $\text{lin}(S)$, $\text{aff}(S)$ und $\text{conv}(S)$. Was ändert sich, wenn zu S der Nullpunkt $(0, 0)$ hinzugefügt wird?

b) Zeigen Sie, dass die affine Hülle von S der kleinste affine Raum ist, der S enthält.

c) Zeigen Sie: Die affine und die lineare Hülle von S sind genau dann gleich, wenn der Nullpunkt in $\text{aff}(S)$ enthalten ist.

d) Zeigen Sie: Für jedes beliebige x aus der affinen Hülle von S gilt die Gleichheit $\text{aff}(S) = x + \text{lin}(S - x)$.

e) Welche der Relationszeichen $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$ und $=$ können an Stelle der Zeichen $\diamondsuit$ und $\heartsuit$ eingesetzt werden, um die folgenden zwei Ausdrücke für alle Mengen S und T aus $\mathbb{K}^n$ in wahre Aussagen zu überführen?

(I) $\operatorname{conv}(S \cup T) \diamondsuit \operatorname{conv}(S) \cup \operatorname{conv}(T)$.

(II) $\operatorname{conv}(S \cap T) \heartsuit \operatorname{conv}(S) \cap \operatorname{conv}(T)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie zu $A = \{(t,t),(t,-t) | 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, so dass $A + B$ konvex ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie:
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex $\Rightarrow$ $\operatorname{Inn}(M)$ konvex.

(5 Punkte)

Aufgabe 5:
Charakterisieren Sie alle Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $|M| < \infty$ mit:

$$\exists\, k \geq 0 : \ \tilde{M} = \{x \mid \exists\, y \in M : |x - y| \leq k\} \text{ konvex.}$$

(8 Punkte)