Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 20. Januar 2004, vor der Vorlesung

Übungsblatt 11

Aufgabe 48:
Zeigen Sie:

a) Enthält ein Ellipsoid $E = \{x \mid (x-t)^T B^{-1}(x-t) \leq 1\}$ einen Ball mit Radius r, dann ist auch der Ball $\{x \mid (x-t)^T(x-t) \leq r^2\}$ in E enthalten.

b) Es sei ein $n-$dimensinaler Simplex $\subset \mathbb{R}^n$ mit Knoten $v_0, \ldots, v_n$ gegeben. Sei $v_c = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n v_j$ der Schwerpunkt des Simplex. Angenommen, die v_j haben rationale Koeffizienten mit Nennern $\leq 2^L$ für ein gegebenes L. Zeigen Sie, dass die Kugel mit Mittelpunkt v_c und Radius $r = 2^{-2nL}$ vollständig im Simplex liegt.

c) Besitzt ein lineares Ungleichungssystem eine Lösung und enthält das Ellipsoid E alle Lösungen des Ungleichungssystems mit $\|x\| \leq n2^L$, dann hat jeder Punkt auf dem Rand von E mindestens den Abstand 2^{-2nL} vom Mittelpunkt von E.

(15 Punkte)

Aufgabe 49:
Wir beweisen nun den Satz von John.
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere symmetrische konvexe Menge (S ist symmetrisch, wenn gilt: $x \in S \Rightarrow -x \in S$).
Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es existiert ein Ellipsoid E mit minimalem Volumen, das S enthält. (Benutzen Sie hierfür ein Kompaktheitsargument.)

b) Zeigen Sie, dass dieses Ellipsoid eindeutig ist. Nehmen Sie dazu an, dass es zwei Ellipsoide mit gleichem Volumen gibt, die die obigen Eigenschaften haben und nutzen Sie aus, dass diese Eigenschaften unter invertierbare lineare Abbildungen erhalten bleiben.

c) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}E \subset S$$

(20 Punkte)