Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 9. Dezember, vor der Vorlesung

# Übungsblatt 8

**Definition:**
Wie in der Vorlesung sei definiert:

- $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = n\}$
- $e^T = (1, \ldots, 1)$
- $B^\star(e, \varrho) = \left\{x \mid e^T x = n,\ \|x - e\| \leq \varrho\right\}$
- $R := \min\{\varrho \,|\, B^\star(e, \varrho) \supseteq \Sigma\}$
- $r := \max\{\varrho \,|\, B^\star(e, \varrho) \subseteq \Sigma\}$

**Aufgabe 35:**
Zeigen Sie, dass $R = \sqrt{n(n-1)}$ und $r = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ gilt.

(10 Punkte)

**Definition:**
Für $x^{(k)} \in \overset{\circ}{\Sigma}$ sei wie in der Vorlesung die Abbildung $T_k : \Sigma \mapsto \Sigma$ definiert:

$$T_k(x_1, \ldots, x_n) := \frac{n}{\sum_{i-1}^n \frac{x_i}{x_i^{(k)}}} \left( \frac{x_1}{x_1^{(k)}}, \ldots, \frac{x_n}{x_n^{(k)}} \right)$$

**Aufgabe 36:**
Zeigen Sie, dass $T_k$ jedes Stratum in sich selbst überführt, also $T_k(\Sigma_\mathrm{I}) = \Sigma_\mathrm{I}$ für alle $\mathrm{I} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\Sigma_\mathrm{I} = \{x \in \Sigma \,|\, x_i = 0\, \forall i \in \mathrm{I},\ x_i > 0\, \forall i \notin \mathrm{I}\}$.

(5 Punkte)

**Aufgabe 37:**
Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x) = x_1 \cdots x_n$ in der Menge $B^\star(e, \alpha r)$, $0 < \alpha < 1$, $r$ wie in Aufgabe 35, im Punkt

$$e + \alpha \left( -1, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1} \right)$$

ihr Minimum annimmt.

(10 Punkte)

**Aufgabe 38:**
Betrachten Sie das folgende LP:

$$\begin{array}{lrrrcl} \min & x_2 & & & & \\ \text{s. t.} & x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Skizzieren Sie den für das LP zulässigen Bereich.

b) Überprüfen Sie die Voraussetzungen für den Algorithmus von Karmarkar.

c) Führen Sie für dieses LP den ersten Schritt von Karmarkars Algorithmus für $\alpha = \frac{2}{9}$ aus.

(10 Punkte)