

## Einführung in die Diskrete Mathematik

### 8. Übung

1. Sei  $G$  ein azyklischer gerichteter Graph,  $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $s, t \in V(G)$ . Zeige, daß ein kürzester  $s$ - $t$ -Pfad in Linearzeit zu finden ist. (4 Punkte)
2. Betrachte Instanzen des Dijkstra-Algorithmus, in denen alle Kantengewichte ganzzahlig und durch eine Konstante  $C$  beschränkt sind. Finde für solche Instanzen einen Algorithmus mit linearer Laufzeit. (4 Punkte)
3. Finde einen möglichst effizienten Algorithmus für das folgende Problem (mit Bestimmung der asymptotischen Laufzeit):  
Gegeben seien ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit Kantengewichten  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $s, t \in V(G)$ . Gesucht ist ein  $s$ - $t$ -Weg, dessen längste Kante möglichst kurz ist. (4 Punkte)
4. Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender gerichteter Graph mit Kantenlängen  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $s, t \in V$ . Ferner sei  $h : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine (heuristische) untere Schranke für die Distanz zu  $t$ , d.h. für alle Knoten  $v \in V$  gilt  $h(v) \leq \text{dist}_{G,c}(v, t)$ . Für alle Kanten  $(u, v) \in E$  gelte  $h(u) \leq h(v) + c((u, v))$ . Dann berechnet der folgende Algorithmus A die Länge eines kürzesten  $s$ - $t$ -Weges.

**Algorithmus A** ( $G, c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, s, t, h : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ )

```
1  for  $x \in V \setminus \{s\}$  do  $x.\text{val} := +\infty$ 
2   $s.\text{val} := h(s)$ 
3   $Q := V$ 
4  while  $Q \neq \emptyset$  do
5     $x :=$  Knoten in  $Q$ , der  $\text{val}$  minimiert
6    if  $x = t$  then return  $x.\text{val}$ 
7     $Q := Q \setminus \{x\}$ 
8    for  $y \in N(x) \cap Q$  do
9       $y.\text{val} := \min \{y.\text{val}, x.\text{val} + c((x, y)) + h(y) - h(x)\}$ 
```

(4 Punkte)