Wintersemester 2007/08 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

13. Übung

1. Sei G ein kreisfreier gerichteter Graph mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Gesucht ist eine maximal gewichtete Kantenmenge $F \subseteq E(G)$, so daß kein Pfad in G mehr als eine Kante von F enthält. Zeige, daß dieses Problem in polynomieller Zeit lösbar ist. (4 Punkte)

   Hinweis: Siehe Aufgabe 3 von Zettel 11.

2. Sei G ein gerichteter Graph mit Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, und sei $b : V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$. Beweise, daß es genau dann einen b-Fluß gibt, wenn

   $$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \sum_{v \in X} b(v) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G)$$

   gilt. (4 Punkte)

3. Sei (G, u, c, b) ein Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Sei $\bar{e} \in E(G)$ ein Kante mit $c(\bar{e}) > (|V(H)| - 1) \max_{e \in E(G) \setminus \{\bar{e}\}} |c(e)|$. Beweise die folgende Aussage: Wenn es einen b-Fluß f in (G, u) mit $f(\bar{e}) = 0$ gibt, dann gilt $f(\bar{e}) =$ für jede Optimallösung f. (4 Punkte)

4. Beweise die folgende Aussage: Es seien ein gerichteter Graph G und natürliche Zahlen $a(x)$, $b(x)$ für jedes $x \in V(G)$ gegeben. Dann hat G genau dann einen spannenden Subgraphen H mit $|\delta^+_H(x)| = a(x)$ und $|\delta^-_H(x)| = b(x)$ für jedes $x \in V(G)$, wenn

   $$\sum_{x \in V(G)} a(x) = \sum_{x \in V(G)} b(x) \quad \text{und}$$

   $$\sum_{x \in X} a(x) \leq \sum_{y \in V(G)} \min\{b(y), |E^+_G(X, \{y\})|\} \quad \text{für alle } X \subseteq V(G)$$

   gilt. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 5.2.2008, **vor** der Vorlesung.