Wintersemester 2008/09 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
5. Übung

1. Ein **induzierter Teilgraph** eines Graphen G ist ein Teilgraph H von G, dessen Kantenmenge die Menge aller Kanten von G ist, deren Endpunkte beide zu $V(H)$ gehören. Man sagt auch, H sei der **von** $V(H)$ **induzierte** Teilgraph von G und schreibt $H = G[V(H)]$.

   Man beweise, dass ein einfacher ungerichteter Graph genau dann bipartit ist, wenn keiner seiner induzierten Teilgraphen ein Kreis ungerader Länge ist. (4 Punkte)

2. Angenommen, alle Kantengewichte sind ganzzahlig und liegen zwischen 0 und einer Konstante C. Kann man Dijkstras Algorithmus für diesen besonderen Fall so implementieren, dass er lineare Laufzeit hat? (4 Punkte)
   Hinweis: Man benutze ein mit $0, \ldots, |V(G)| \cdot C$ indiziertes Array, um die Knoten nach deren aktuellen l-Werten zu speichern.

3. Ein **s-t-Schnitt** in einem Digraphen G ist eine Kantenmenge F, für die eine Knotenmenge $X \subseteq V(G) \setminus \{t\}$ existiert mit $s \in X$ und $F = \delta^+(X)$.

   Sei G ein Graph (gerichtet oder ungerichtet) mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und $s, t \in V(G)$, so dass t von s aus erreichbar ist. Man zeige: Die minimale Länge eines s-t-Weges ist gleich der maximalen Anzahl von s-t-Schnitten (wobei Wiederholungen erlaubt sind) mit der Eigenschaft, dass jede Kante e in höchstens $c(e)$ von ihnen enthalten ist. (4 Punkte)

4. Sei G ein azyklischer Digraph (d.h. ohne gerichtete Kreise). Beweisen Sie (am einfachsten in der folgenden Reihenfolge):

   (a) G enthält einen Knoten v mit $\delta^-(v) = \emptyset$.

   (b) G hat eine **topologische Ordnung**, d.h. eine Nummerierung der Knoten $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $n = |V(G)|$ und $i < j$ für alle $(v_i, v_j) \in E(G)$.

   (c) Sei $v \in V(G)$ und $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Dann kann man in linearer Zeit $\mathrm{dist}_{G,c}(v, w)$ für alle $w \in V(G)$ berechnen.

   (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 25.11.2008, **vor** der Vorlesung.