

## Einführung in die Diskrete Mathematik

## 11. Übung

1. Man beweise, dass die beiden folgenden Entscheidungsprobleme in  $NP$  sind:

(a) Gegeben seien zwei ungerichtete Graphen  $G$  und  $H$ . Ist  $G$  zu einem Teilgraphen von  $H$  isomorph? Dabei heißen zwei ungerichtete Graphen  $A$  und  $B$  *isomorph*, wenn es zwei bijektive Abbildungen  $\phi_V : V(A) \rightarrow V(B)$  und  $\phi_E : E(A) \rightarrow E(B)$  gibt, so dass  $\phi_E(\{v, w\}) = \{\phi_V(v), \phi_V(w)\}$  für alle  $\{v, w\} \in E(A)$  gilt.

(b) Gegeben seien  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $a \in \mathbb{Z}^n$  und  $\beta \in \mathbb{Z}$ . Gibt es ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax = b$  und  $a^\top x \leq \beta$ ?

(4 Punkte)

2. Man beweise: Ist  $\mathcal{P} \in NP$ , so gibt es ein Polynom  $p$ , so dass für  $\mathcal{P}$  ein Algorithmus mit Laufzeit  $O(2^{p(n)})$  existiert, wobei  $n$  die Länge der Eingabe sei. (4 Punkte)

3. Man beschreibe einen Algorithmus mit linearer Laufzeit, der für jede SATISFIABILITY-Instanz eine Wahrheitsbelegung bestimmt, die mindestens die Hälfte aller Klauseln erfüllt. (4 Punkte)

4. Die Menge der *booleschen Formeln* zu einer Variablenmenge  $X$  sei wie folgt definiert: „true“ und „false“ sind boolesche Formeln der Länge 0. „ $x$ “ und „ $\bar{x}$ “ (für  $x \in X$ ) sind boolesche Formeln der Länge 1. Sind  $\phi$  und  $\phi'$  boolesche Formeln der Längen  $k$  bzw.  $k'$ , dann sind „ $(\phi \wedge \phi')$ “ und „ $(\phi \vee \phi')$ “ boolesche Formeln der Länge  $k + k'$ . Weitere boolesche Formeln gibt es nicht.

Betrachten Sie nun folgendes Problem: Zu einer gegebenen booleschen Formel soll eine äquivalente boolesche Formel minimaler Länge gefunden werden. Dabei heißen zwei boolesche Formeln *äquivalent*, wenn Sie bei natürlicher Auswertung für jede Wahrheitsbelegung der Variablen dasselbe Ergebnis liefern. Zeigen Sie, dass es genau dann einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem gibt, wenn  $P = NP$  gilt. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 20.1.2009, **vor** der Vorlesung.