

Algorithmische Mathematik I

Weihnachtsaufgabe

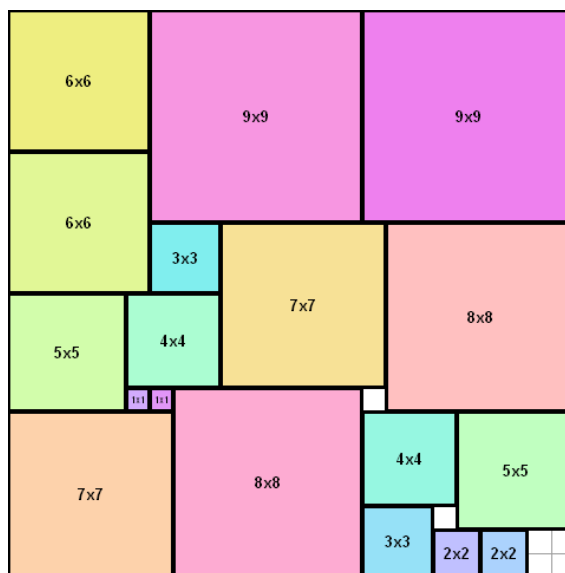
Der Weihnachtsmann hat $2n$ Geschenke, die alle quadratisch sind und je zwei haben die Größe $i \times i$, für $i = 1, \dots, n$. Diese $2n$ Geschenke will er in einem großen quadratischen Karton verpacken. Welche Abmessungen muss der Karton haben?

Wir nehmen dazu an, dass der Karton ganzzahlige Kantenlängen hat und alle Geschenke in diesem Karton achsenparallel untergebracht werden. Offensichtlich muss der Karton mindestens die Seitenlänge

$$f(n) := \left\lceil \sqrt{2 \sum_{i=1}^n i^2} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}} \right\rceil$$

haben¹.

Für $n = 9$ erhält man zum Beispiel eine Seitenlänge von 24 und nebenstehende Abbildung zeigt eine Möglichkeit, wie die 18 Geschenke in einen quadratischen Karton mit Seitenlänge 24 gepackt werden können.



- a) Lassen sich die $2n$ Geschenke immer in einen quadratischen Karton mit Seitenlänge $f(n)$ packen?

Da diese Frage nicht einfach ist, betrachten wir die beiden folgenden leichteren Aufgaben:

- b) Geben Sie eine möglichst kleine Kartongröße an, für die Sie nachweisen können, dass die $2n$ Geschenke darin Platz haben. (Z.B. reicht sicherlich ein Karton mit Seitenlänge $n(n+1)$ da man in diesem einfach alle Geschenke nebeneinander legen kann.)
- c) Bis zu welchem n können Sie die $2n$ Geschenke in einen quadratischen Karton mit Seitenlänge $f(n)$ packen?

Abgabe: Bis spätestens Montag, 12.1.2009.

¹Die ersten 20 Werte der Funktion $f(n)$ gibt folgende Tabelle wieder:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	2	4	6	8	11	14	17	21	24	28	32	37	41	46	50	55	60	65	71	76