Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner
C. Mohr

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I

7. Übung

1 Sortieren Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe der O- und der Θ-Notation:

$$(\sqrt{2})^{\log(n)}, \quad 2^{\log(n)}, \quad n^2, \quad \lceil \log(n) \rceil !, \quad 2^{\sqrt{2\log(n)}}, \quad \log(n!), \quad 2^{(2^n)}, \quad 2^{(2^{n+1})}.$$

(10 Punkte)

2. Heaps:

   (a) Zeigen Sie, dass man in einen (zu Beginn leeren) Binärheap n Elemente in Zeit $O(n)$ einfügen kann.

   (b) Beschreiben Sie, wie eine Decrease-Key-Operation (d.h. der Schlüssel eines gegebenen Heap-Elements soll verkleinert werden) in einem Binärheap mit n Elementen in Zeit $O(\log n)$ durchgeführt werden kann. (10 Punkte)

3. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Der k-Median einer n-elementigen Menge $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von Zahlen ist dann die Zahl $a \in M$, so dass $|\{b \in M \mid b < a\}| = k - 1$ und $|\{b \in M \mid b > a\}| = n - k$. Betrachten Sie folgendes Verfahren, um den k-Median von $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ zu bestimmen:
   Falls $n = 1$, dann gebe man a_1 zurück. Andernfalls sei $A := \{a \in M \mid a < a_1\}$, falls $\{a \in M \mid a < a_1\} \neq \emptyset$, und $A := \{a_1\}$ sonst. Außerdem sei $B := M \setminus A$. Falls $|A| \geq k$, so gebe man den (rekursiv berechneten) k-Median von A zurück. Sonst gebe man den (ebenfalls rekursiv berechneten) $(k - |A|)$-Median von B zurück.
   Man zeige, dass dieses Verfahren korrekt arbeitet und bestimme die durchschnittliche Laufzeit über alle möglichen Permutationen von $a_1, \ldots, a_n$ betrachtet. (10 Punkte)

4. Graphen:

   (a) Zeigen Sie: Jeder ungerichtete Graph mit $n \geq 3$ Knoten und mehr als $\frac{n^2}{4}$ Kanten besitzt einen Kreis der Länge höchstens 3.

   (b) Beweisen Sie, dass eine Folge natürlicher Zahlen $d_1, \ldots, d_n$ mit $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ genau dann die Gradfolge eines Graphen ist (d.h. es gibt einen Graph G mit $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $|\delta(v_i)| = d_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$), wenn $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ dies ist. (10 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 10.12.2008, **vor** der Vorlesung.