Wintersemester 2011/12 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik

Prof. Dr. S. Hougardy Universität Bonn

Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

11. Übung

1. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Profit $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Profit $p(X)$ bringt? (4 Punkte)

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit Kapazitäten $u : E \to \mathbb{R}_+$. Sei $\emptyset \neq A \subset V$, so daß $\delta(A)$ ein minimaler Schnitt in G ist.

   (a) Zeigen Sie, daß $u(\delta(A)) \leq \frac{2}{n} u(E)$ gilt (mit $u(E) := \sum_{e \in E} u(e)$).

   (b) Betrachten Sie das folgende Verfahren: Wählen Sie zufällig eine Kante und kontrahieren Sie sie, wobei eine Kante e mit Wahrscheinlichkeit $\frac{u(e)}{u(E)}$ genommen wird. Wiederholen Sie diese Vorgehensweise, bis nur noch zwei Knoten übrig sind (die Wahlen der einzelnen Kanten sollen dabei unabhängig voneinander sein). Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit, daß nie eine Kante aus $\delta(A)$ kontrahiert wird, mindestens $\frac{2}{(n-1)n}$ beträgt.

   (c) Zeigen Sie, daß man durch $kn(n-1)$ unabhängige Wiederholungen des Verfahrens aus (b) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - e^{-2k}$ einen minimalen Schnitt in G erhält. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 10.1.2012, vor der Vorlesung.

Hinweis der Mentorengruppe:
Am Do, den 22.12. findet im Konferenzraum des Arithmeums ein Vortrag zum Thema „Umstieg von C auf C++“ statt. Dabei sollen Grundlagen in C++ vermittelt werden, um eine objektorientierte Alternative für C zu bieten