Wintersemester 2012/13
Professor Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
9. Übung

1. (a) Es sei G ein zusammenhängender bipartiter Graph mit mindestens zwei Knoten. Zeigen Sie, dass es genau eine Bipartition von G gibt.

   (b) Zeigen Sie, dass ein einfacher Graph genau dann bipartit ist, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als induzierten Teilgraphen enthält.

   (c) Ein Graph heiße *geodätisch*, wenn es zwischen je zwei Knoten genau einen kürzesten Weg gibt. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann geodätisch und bipartit ist, wenn er ein Baum ist. (2+2+2 Punkte)

2. Sei G ein gerichteter Graph und $R := \{(v, w) \in V(G) \times V(G) : w \text{ ist von } v \text{ aus erreichbar}\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass R genau dann eine partielle Ordnung ist, wenn G azyklisch ist.

   (b) Zeigen Sie, dass eine totale Ordnung T von $V(G)$ genau dann eine lineare Erweiterung von R ist, wenn T eine topologische Ordnung von G ist.

   (c) Zeigen Sie, dass jede partielle Ordnung einer endlichen Menge eine lineare Erweiterung besitzt. (1+1+2 Punkte)

3. Sei S eine endliche Menge mit einer partiellen Ordnung „$\preceq$“. Beweisen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\preceq$ ist durch Schlüssel induziert;

   (b) $(a \not\preceq b \wedge b \not\preceq c \wedge a \neq c) \Rightarrow a \not\preceq c$ für alle $a, b, c \in S$;

   (c) $\{(x, y) : x = y \vee (x \not\preceq y \wedge y \not\preceq x)\}$ ist eine Äquivalenzrelation. (6 Punkte)

4. In dieser Aufgabe sollen Binärstrings (d.h. Wörter über $\{0, 1\}$) lexikographisch sortiert werden. Wenn s und t zwei Binärstrings der Länge m sind, dann heißt s *lexikographisch kleiner als* t, wenn es einen Index $j \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass s und t an den ersten $j - 1$ Stellen identisch sind, s an der Stelle j den Wert 0 hat und t an der Stelle j den Wert 1 hat. Zeigen Sie, dass man n Binärstrings der Länge m in Zeit $O(mn)$ (also in linearer Laufzeit) lexikographisch sortieren kann. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 11.12.2012, **vor** der Vorlesung.

Öffnungszeiten des Help Desks: montags, 12 – 14 Uhr und freitags, 12 – 14 Uhr in Raum N1.002 und donnerstags, 18 – 20 Uhr **in Raum N0.003**.