Wintersemester 2012/13
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
4. Übung

1. Beweisen oder widerlegen sie die folgende Aussage: Entfernt man aus einem zusammenhängenden ungerichteten Graphen mit Kantengewichten sukzessive die schwerste Kante, deren Herausnahme nicht den Zusammenhang des Graphen zerstört, so bleibt am Ende ein minimal spannender Baum übrig. (4 Punkte)

2. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$.
   Wie lassen sich die folgenden Probleme möglichst effizient lösen?

   (a) Sei $v \in V(G)$ ein Knoten. Gesucht ist ein aufspannender Baum, in dem v kein Blatt ist und der unter allen aufspannenden Bäumen, in denen v kein Blatt ist, minimales Gewicht hat.

   (b) Man bestimme die Menge aller Kanten $e \in E(G)$, für die es einen aufspannenden Baum T_e mit minimalem Gewicht gibt, so daß e in T_e enthalten ist.

   (c) Man bestimme einen aufspannenden zusammenhängenden Teilgraphen von G mit minimalem Gewicht.

   (d) Man bestimme einen aufspannenden Baum T für G, dessen maximales Kantengewicht minimal ist. (4 Punkte)

3. Ein Telekommunikationsnetzwerk werde durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ modelliert, dessen Kanten voneinander unabhängige Ausfallwahrscheinlichkeiten $p : E \to [0, 1]$ haben. Wie findet man effizient einen spannenden Baum, der die Wahrscheinlichkeit, daß alle seine Kanten funktionieren, maximiert? (4 Punkte)

4. Sei T ein kostenminimaler aufspannender Baum für einen ungerichteten Graphen G mit nichtnegativen Kantengewichten. G' entstehe aus G, indem ein neuer Knoten s hinzugefügt wird, der mit jedem Knoten aus $V(G)$ durch eine (ebenfalls gewichtete) Kante verbunden ist. Zeigen Sie, wie man aus T und G' in linearer Laufzeit einen kostenminimalen aufspannenden Baum für G' berechnen kann. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 8.11.2012, vor der Vorlesung.