Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
7. Übung

1. Sei G ein Graph mit Kantenlängen $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und $s, t \in V$. Wir wollen einen kürzesten s–t–Weg finden, indem wir Dijkstras Algorithmus von beiden Knoten s und t aus starten. Wir verwalten alle Knoten also in zwei Heaps und ordnen jedem Knoten v zwei Abstandslabel $l_s(v)$ und $l_t(v)$ zu. Wir stoppen, sobald ein Knoten $v \in V$ aus beiden Heaps entfernt wurde.

   a) Geben Sie ein Beispiel an, in dem dann $l_s(v) + l_t(v) > \mathrm{dist}(s,t)$ gilt.

   b) Wie findet man mit dieser Abbruchbedingung dennoch einen kürzesten s–t–Weg? (4 Punkte)

2. Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für das folgende Problem (mit Bestimmung der asymptotischen Laufzeit):
   Gegeben seien ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s, t \in V(G)$. Gesucht ist ein s–t–Weg, dessen längste Kante möglichst kurz ist. (4 Punkte)

3. Zeigen Sie, daß man zu einem gegebenen ungerichteten Graphen G mit positiven Kantengewichten für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ einen zweitkürzesten s-t-Weg (falls vorhanden) in polynomieller Zeit finden kann. Mit einem zweitkürzesten s-t-Weg ist dabei ein Weg gemeint, der unter allen s-t-Wegen, die länger sind als ein kürzester s-t-Weg, kürzeste Länge hat. (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie zunächst einen gerichteten Graphen G' mit $V(G') = V(G)$, der eine Kante (v, w) genau dann enthält, wenn es einen kürzesten s-t-Weg in G gibt, der $\{v, w\}$ enthält und dabei (bei s beginnend) zuerst v besucht (für $\{v, w\} \in E(G)$). Zeigen Sie, daß man G' effizient berechnen kann. Überlegen Sie sich, wie man einen (kurzen) s-t-Weg in G finden kann, der keinem gerichteten Weg in G' entspricht.

4. Sei G ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Es sei außerdem eine Lösung des KÜRZESTE-WEGE-PROBLEMS FÜR ALLE PAARE für diese Instanz gegeben, für je zwei Knoten s und t sei also die Länge eines kürzesten s-t-Weges in (G, c) bekannt. Sei nun $e_0 \in E(G)$ und $\delta > 0$, und es sei $c' : E(G) \to \mathbb{R}$ definiert durch $c'(e_0) = c(e_0) - \delta$ und $c'(e) = c(e)$ für $e \in E(G) \setminus \{e_0\}$. In welcher Zeit kann man überprüfen, ob c' ebenfalls konservativ ist? Und falls c' konservativ ist, wie kann man in Zeit $O(n^2)$ eine Lösung für das KÜRZESTE-WEGE-PROBLEM FÜR ALLE PAARE in (G, c') berechnen? (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 29.11.2012, vor der Vorlesung.