Wintersemester 2012/13
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. Überlegen Sie sich, was passiert, wenn man den Minimum-Mean-Cycle-Cancelling-Algorithmus so abändert, daß man nicht mehr notwendigerweise einen Kreis mit minimalem Durchschnittsgewicht wählt, sondern entlang irgendeines beliebigen Kreises mit negativem Gewicht augmentiert (natürlich augmentiert man auf dem Kreise so viel wie möglich). Zeigen Sie, daß das veränderte Verfahren (bei ungeschickter Wahl der Kreise) nicht mehr unbedingt nach eine polynomiellen Anzahl von Augmentierungen terminiert. (4 Punkte)

2. Sei (G, u, c, b) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluß f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:

   $$b(X) + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \leq 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluß mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (4 Punkte)

3. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e \in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem lösen kann.

   (b) Man zeige, daß, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muß für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (4 Punkte)

4. Sei (G, u, c, b) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Sei $e_0 \in E(G)$ eine Kante mit $c(e_0) > (|V(G)| - 1) \max_{e \in E(G) \setminus \{e_0\}} |c(e)|$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn es einen b-Fluß g in (G, u) mit $g(e_0) = 0$ gibt, dann gilt $f(e_0) = 0$ für jede Optimallösung f. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 17.1.2013, vor der Vorlesung.