Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
2. Übung

1. Für natürliche Zahlen b und k sei $W(b,k)$ die Menge aller Wörter der Länge k über dem Alphabet $\{1,\dots,b\}$. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Funktion φ von $\{1,\dots,|W(b,k)|\}$ nach $W(b,k)$ gibt, so dass sich für alle $i \in \{1,\dots,|W(b,k)|-1\}$ die Wörter $\varphi(i)$ und $\varphi(i+1)$ nur an genau einer Stelle unterscheiden. (5 Punkte)

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Für alle Funktionen $f,g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$.
   (b) Für alle Funktionen $f,g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $f = O(g)$ oder $f = \Omega(g)$.
   (c) $\log_2(n!) = \Theta(n \log_2 n)$. (1+1+3 Punkte)

3. Es sei $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$\sum_{i=1}^{n} i^z = \Theta(n^{1+z}).$$
(4 Punkte)

4. Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an, der zu gegebenen natürlichen Zahlen a und b die Zahl a^b berechnet, und der nur $O(\log_2 b)$ elementare Rechenoperationen (`+, -, *, /, %`) durchführt. Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus tatsächlich diese Eigenschaften hat. (6 Punkte)

Abgabe: Montag, den 20.10.2014, **vor** der Vorlesung.