Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
8. Übung

1. (a) Sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$. Zeigen Sie: X enthält genau dann eine ungerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad in G, wenn $|\delta(X)|$ ungerade ist.

   (b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn G ein ungerichteter Graph ist, in dem es genau zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt, dann gibt es einen Weg zwischen diesen beiden Knoten. (2+2 Punkte)

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
   Wenn G ein stark zusammenhängender gerichteter Graph ist, dessen zugrundeliegender ungerichteter Graph mindestens einen Kreis ungerader Länge enthält, dann enthält G auch einen gerichteten Kreis ungerader Länge. (5 Punkte)

3. Sei G ein Baum mit n Knoten und $n \geq 2$. Zeigen Sie:

   (a) G hat einen Knoten v, so dass keine Zusammenhangskomponente von $G - v$ mehr als $\frac{n}{2}$ Knoten enthält.

   (b) G hat genau $2 + \sum_{v \in V(G)} \max\{0, |\delta(v)| - 2\}$ Blätter. (3+2 Punkte)

4. Es sei S eine Menge mit n Elementen und $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen Teilmengen von S. Zeigen Sie, dass es dann ein $x \in S$ geben muss, für das auch die Mengen $A_i \cup \{x\}$ $(i = 1 \ldots, n)$ paarweise verschieden sind. (6 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie einen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\mathcal{A}$, in dem für jede Kante $\{A_i, A_j\}$ gilt: $|(A_i \setminus A_j) \cup (A_j \setminus A_i)| = 1$.

Abgabe: Montag, den 1.12.2014, **vor** der Vorlesung.