Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
9. Übung

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Seien (V, E_1) und (V, E_2) zwei Wälder mit $|E_1| < |E_2|$. Dann gibt es eine Kante $e \in E_2 \setminus E_1$, so dass $(V, E_1 \cup \{e\})$ ein Wald ist.

   (b) Seien (V, F_1) und (V, F_2) zwei Branchings mit $2|F_1| < |F_2|$. Dann gibt es eine Kante $e \in F_2 \setminus F_1$, so dass $(V, F_1 \cup \{e\})$ ein Branching ist.

   (c) Die Aussage aus b) wird falsch, wenn man die Bedingung „$2|F_1| < |F_2|$“ durch „$2|F_1| \leq |F_2|$“ ersetzt. (3+2+2 Punkte)

2. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph, $r \in V(G)$, und T ein durch Tiefensuche ausgehend von r gefundener aufspannender Baum. Für $u, v \in V(G)$ bezeichne P_{uv} den u-v-Weg in T. Zeigen Sie: Für alle Kanten $\{x, y\} \in E(G)$ gilt $x \in V(P_{ry})$ oder $y \in V(P_{rx})$. (3 Punkte)

3. (a) Zeigen Sie, dass jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und mehr als $\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ Kanten einen Kreis der Länge höchstens 4 besitzt.

   (b) Beweisen Sie, dass eine Folge natürlicher Zahlen $d_1, \ldots, d_n$ mit $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ genau dann die Gradfolge eines Graphen ist (d.h. es gibt einen Graph G mit $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $|\delta(v_i)| = d_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$), wenn $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ dies ist. (4+3 Punkte)

4. Zeigen Sie, wie man zu einem gegebenen ungerichteten Graphen G mit n Knoten und m Kanten einen kürzesten Kreis in G in Zeit $O(nm)$ berechnen kann. (3 Punkte)

Abgabe: Montag, den 8.12.2014, **vor** der Vorlesung.