Wintersemester 2014/15
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
14. Übung

1. Die Menge der *booleschen Formeln* zu einer Variablenmenge X sei wie folgt definiert: „true“ und „false“ sind boolesche Formeln der Länge 0. „x“ und „$\bar{x}$“ (für $x \in X$) sind boolesche Formeln der Länge 1. Sind ϕ und ϕ' boolesche Formeln der Längen k bzw. k', dann sind „$(\phi \wedge \phi')$“ und „$(\phi \vee \phi')$“ boolesche Formeln der Länge $k + k'$. Weitere boolesche Formeln gibt es nicht.
   Betrachten Sie nun folgendes Problem: Zu einer gegebenen booleschen Formel soll eine äquivalente boolesche Formel minimaler Länge gefunden werden. Dabei heißen zwei boolesche Formeln *äquivalent*, wenn Sie bei natürlicher Auswertung für jede Wahrheitsbelegung der Variablen dasselbe Ergebnis liefern. Zeigen Sie, dass es genau dann einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem gibt, wenn $P = NP$ gilt. (6 Punkte)

2. Vom Entscheidungsproblem STABLE SET wurde in der Vorlesung gezeigt, dass es NP-vollständig ist. Ist es weiterhin NP-vollständig (unter der Annahme, dass $P \neq NP$), wenn es auf Instanzen beschränkt wird, in denen der Graph
   (a) bipartit ist?
   (b) 2-fach zusammenhängend ist? (3+3 Punkte)

3. Sei $k \geq 2$ eine Konstante. Beweisen Sie, dass es NP-vollständig ist zu entscheiden, ob ein gegebener ungerichteter Graph G einen aufspannenden Baum T enthält, in dem kein Knotengrad größer als k ist. Beachten Sie, dass es nicht ausreicht, nur den Fall $k = 2$ zu betrachten. (4 Punkte)

4. Beweisen Sie, dass folgendes Problem, das etwa im Verlaufe eines Doppelkopfturniers auftreten könnte, NP-schwer ist: Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, eine Menge S mit $4n$ Elementen (Doppelkopfspieler) und eine Menge $\mathcal{X}$ von vierelementigen Teilmengen von S (unerwünschte Tischzusammensetzungen). Gesucht ist eine Partition von S in vierelementige Teilmengen, so dass möglichst wenige davon zu $\mathcal{X}$ gehören. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 29.1.2015, vor der Vorlesung.