Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
5. Übung

1. (a) Zeigen Sie, wie man in einem gegebenen gerichteten Graphen ein Branching mit maximaler Kardinalität in linearer Laufzeit finden kann.

   (b) Berechnen Sie in dem Graphen, der in Abbildung 1 dargestellt ist, mit Hilfe des Algorithmus von Edmonds ein gewichtsmaximales Branching. Geben Sie auch die Graphen an (mit den zugehörigen Kantengewichten), die während des Algorithmus durch Kontraktion entstehen.

   (3+2 Punkte)

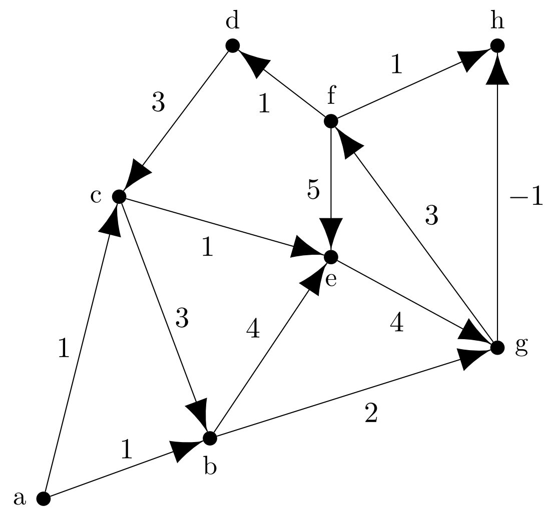

Abbildung 1: Instanz zur Berechnung eines maximal gewichteten Branchings.

2. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $s, t \in V(G)$, $L \subseteq V(G)$, $L \neq \emptyset$, so dass von jedem Knoten aus jedes Element von L erreichbar ist, und $\pi(v) := \min\left\{0, \min_{l \in L}\left(\mathrm{dist}_{(G,c)}(t,l) - \mathrm{dist}_{(G,c)}(v,l)\right)\right\}$ für $v \in V(G)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) π ist ein zulässiges Potential in (G, c).

   (b) Jeder kürzeste s-t-Weg in (G, c_π) ist ein kürzester s-t-Weg in (G, c).

   (c) $\left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,t)\right\} \subseteq \left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,t)\right\}$.

   (2+1+2 Punkte)

   Bemerkung: Wenn man eine große Anzahl von Kürzeste-Wege-Berechnungen im selben Graphen aber mit unterschiedlichen Start- und Endknoten durchführen muss, kann es sich lohnen, vorher Abstände zu einer gewissen Menge L von Knoten zu berechnen, die als Orientierungspunkte dienen. Unter Ausnutzung der obigen Eigenschaften kann man damit die Aufrufe von Dijkstras Algorithmus in der Praxis beschleunigen.

3. Sei G ein Graph mit Kantenlängen $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und $s, t \in V$. Wir wollen einen kürzesten s–t–Weg finden, indem wir Dijkstras Algorithmus von beiden Knoten s und t aus starten. Wir stoppen, sobald ein Knoten $v \in V$ aus *beiden* Priority Queues entfernt wurde.

   a) Geben Sie ein Beispiel an, in dem dann $v.\text{Abstand}_s + v.\text{Abstand}_t > \text{dist}(s,t)$ gilt.

   b) Wie findet man mit dieser Abbruchbedingung dennoch einen kürzesten s–t–Weg? (4 Punkte)

4. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints") eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine Teilaufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $a(v) + c((v,w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v,w) \in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.

   a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das Minimum-Mean-Cycle-Problem.

   b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.

   c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann. (2+2+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 24.11.2016, vor der Vorlesung.