

Algorithmische Mathematik I

5. Übung

1. Zeigen Sie, dass man mit Hilfe von Karatsubas Algorithmus zwei natürliche Zahlen mit k - bzw. l -stelliger Binärdarstellung (mit $k \leq l$) in $O(k^{\log_2(3)-1}l)$ Zeit multiplizieren kann. (5 Punkte)
2. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $c, d \geq 0$ und $2 \leq b < a$. Außerdem sei $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton steigende Funktion, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - $T(n) \leq d$ für $n \leq b$ und
 - $T(n) \leq c \cdot n + a \cdot T(\lceil \frac{n}{b} \rceil)$ für $n > b$.

Zeigen Sie, dass dann $T(n) = O(n^{\log_b(a)})$ gilt (5 Punkte)

3. Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Funktion zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen. Diese Funktion benutzt nur die Division durch 2 (die in Binärdarstellung natürlich sehr einfach und schnell realisierbar ist). Welche Laufzeit hat diese Funktion? (5 Punkte)

```
1
2 myint gcd2(myint a, myint b)           // compute greatest common divisor
3 {                                       // ("binary Euclidean algorithm")
4     if (b == 0) return a;
5     else if (a % 2 == 0)
6     {
7         if (b % 2 == 0) return 2 * gcd2(b / 2, a / 2);
8         else return gcd2(b, a / 2);
9     }
10    else
11    {
12        if (b % 2 == 0) return gcd2(a, b / 2);
13        else if (a < b) return gcd2(a, (b - a) / 2);
14        else return gcd2(b, (a - b) / 2);
15    }
16 }
```

4. Erweitern Sie die Klasse `LargeInt`, die in der Vorlesung vorgestellt wurde, um eine Multiplikation. Schreiben Sie dazu einen `*`-Operator, der zwei Zahlen vom Typ `LargeInt` multipliziert. Ihre Implementierung soll eine Laufzeit von $O(l^2)$ haben, wenn l das Maximum der Ziffernzahlen der zu multiplizierenden Zahlen ist. Achten Sie darauf, dass das Ergebnis keine führende Null enthält.

Verwenden Sie den Operator anschließend für eine effizientere Implementierung der Funktion `factorial`. Die Zahl $n!$ soll dabei mit $n - 1$ Multiplikationen berechnet werden statt wie bisher mit $\Theta(n^2)$ Additionen. (5 Punkte)

Abgabe: Montag, den 12.11.2018, bis 10:12 Uhr.

Abgabe der Programmierübungen:

Per E-Mail an `alma_prog_gr_XX@dm.uni-bonn.de`, wobei `XX` durch die Nummer Ihrer Übungsgruppe zu ersetzen ist, also z.B. `alma_prog_gr_07@dm.uni-bonn.de`, wenn Sie in Gruppe 7 sind, oder `alma_prog_gr_12@dm.uni-bonn.de`, wenn Sie in Gruppe 12 sind. Wenn Sie Ihre Übungsgruppe nicht kennen, schreiben Sie an `alma_prog_gr_unbekannt@dm.uni-bonn.de`.

Öffnungszeiten des Help Desks:

Montags, 16 – 19 Uhr und freitags, 12 – 15 Uhr, jeweils in Raum N1.002, Endenicher Allee 60, Nebengebäude.

www.mathematics.uni-bonn.de/files/bachelor/help-desk.pdf

Zusätzlich gibt es ab sofort einen **Help Desk für Programmierfragen**, und zwar immer freitags, 8 – 10 Uhr und 12 – 16 Uhr, im PC-Pool in der Wegelerstraße 6, Raum E02 (Hochschulrechenzentrum).