Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
10. Übung

1. Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Wir bezeichnen für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ mit λ_{st} die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter s-t-Wege in G. Seien nun $x, y, z \in V(G)$ drei verschiedene Knoten und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq \lambda_{xy}$, $\beta \leq \lambda_{xz}$ und $\alpha + \beta \leq \max\{\lambda_{xy}, \lambda_{xz}\}$. Zeigen Sie, dass es dann α x-y-Wege und β x-z-Wege gibt, so dass diese $\alpha + \beta$ Wege paarweise kantendisjunkt sind. (5 Punkte)

2. Sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit Maximum-Adjazenz-Ordnung $v_1, \dots, v_n$. Für $u, v \in V(G)$ sei κ_{uv}^G die maximale Anzahl intern disjunkter u-v-Wege in G. Beweisen Sie, dass dann $\kappa_{v_{n-1}v_n}^G = |E(\{v_n\}, \{v_1, \dots, v_{n-1}\})|$ gilt. (5 Punkte)
   Hinweis: Man beweise mittels Induktion, dass $\kappa_{v_j v_i}^{G_{ij}} = |E(\{v_j\}, \{v_1, \dots, v_i\})|$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt, wobei $G_{ij} = G[\{v_1, \dots, v_i\} \cup \{v_j\}]$. Dazu nehme man o.B.d.A. $\{v_j, v_i\} \notin E(G)$ an (überlegen Sie auch, warum das keine Einschränkung ist), wähle eine kleinste Menge $Z \subseteq \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, die v_j und v_i trennt, und lasse $h < i$ die maximale Zahl sein, so dass $v_h \notin Z$ und v_h mit v_i oder v_j benachbart ist (falls es ein solches h gibt).

3. Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Man beweise die folgende Aussage: Es gibt genau dann eine Zirkulation $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$, wenn

$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$

(5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 16.12.2019, **vor** der Vorlesung.