Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
6. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit konservativen Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Es seien $s, t \in V(G)$ zwei Knoten, so dass t von s aus erreichbar ist. Außerdem gelte für jede Kante $e \in E(G)$, dass $\mathrm{dist}_{G-e,c}(s,t) = \mathrm{dist}_{G,c}(s,t)$. Zeigen Sie, dass es dann zwei kantendisjunkte kürzeste s-t-Wege in (G,c) gibt. (4 Punkte)

2. Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Wir bezeichnen für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ mit λ_{st} die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter s-t-Wege in G. Seien nun $x, y, z \in V(G)$ drei verschiedene Knoten und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq \lambda_{xy}$, $\beta \leq \lambda_{xz}$ und $\alpha + \beta \leq \max\{\lambda_{xy}, \lambda_{xz}\}$. Zeigen Sie, dass es dann α x-y-Wege und β x-z-Wege gibt, so dass diese $\alpha + \beta$ Wege paarweise kantendisjunkt sind. (4 Punkte)

3. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk. Man nenne einen s-t-Präfluss f in (G, u) maximal, wenn $\mathrm{ex}_f(t)$ maximal ist.
   (a) Man zeige, dass es für jeden maximalen s-t-Präfluss f einen maximalen s-t-Fluss f' mit $f'(e) \leq f(e)$ für alle $e \in E(G)$ gibt.
   (b) Man zeige, wie man in $O(nm)$ Zeit einen maximalen s-t-Präfluss in einen maximalen s-t-Fluss umwandeln kann. (4 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Zu einem gegebenen bipartiten Graph G mit Knotengewichten $c : V(G) \to \mathbb{R}$ wird eine stabile Menge $X \subseteq V(G)$ gesucht, deren Gewicht $\sum_{v \in X} c(v)$ maximal ist. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für dieses Problem an. (4 Punkte)

5. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Profit $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Profit $p(X)$ bringt? (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 23.11.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal