Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
7. Übung

1. Man zeige, dass der Push-Relabel-Algorithmus $O(n^2m)$ nichtsaturierende Pushes durchführt, unabhängig von der Wahl des aktiven Knotens v in Schritt ③. (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit Kapazitäten $u : E \to \mathbb{R}_+$. Sei $\emptyset \neq A \subset V$, so dass $\delta(A)$ ein minimaler Schnitt in G ist.
   (a) Zeigen Sie, dass $u(\delta(A)) \leq \frac{2}{n} u(E)$ gilt (mit $u(E) := \sum_{e \in E} u(e)$).
   (b) Betrachten Sie das folgende Verfahren: Wählen Sie zufällig eine Kante und kontrahieren Sie sie, wobei eine Kante e mit Wahrscheinlichkeit $\frac{u(e)}{u(E)}$ genommen wird. Wiederholen Sie diese Vorgehensweise, bis nur noch zwei Knoten übrig sind (die Wahlen der einzelnen Kanten sollen dabei unabhängig voneinander sein). Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nie eine Kante aus $\delta(A)$ kontrahiert wird, mindestens $\frac{2}{(n-1)n}$ beträgt.
   (c) Zeigen Sie, dass man durch $kn(n-1)$ unabhängige Wiederholungen des Verfahrens aus (b) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - e^{-2k}$ einen minimalen Schnitt in G erhält. (1+2+2 Punkte)

3. Betrachten Sie folgendes Problem: Zu einem gegebenen einfachen zusammenhängenden ungerichteten Graphen G soll eine nicht-leere Knotenmenge $S \subseteq V(G)$ gefunden werden, sodass $\frac{|E(G[S])|}{|S|}$ maximal ist. Zeigen Sie, dass dieses Problem durch $O(\log(n))$ Aufrufe eines Max-Flow-Algorithmus auf einem Graph mit $O(n)$ Knoten und $O(m)$ Kanten gelöst werden kann, wobei wie immer $n = |V(G)|$ und $m = |E(G)|$ sei. (6 Punkte)
   Hinweis: Führen Sie binäre Suche durch, um den Wert $D_G := \max\left\{\frac{|E(G[S])|}{|S|} \mid S \subseteq V(G), S \neq \emptyset\right\}$ zu berechnen. Um für einen Wert γ zu testen, ob $\gamma < D_G$ gilt, konstruieren Sie einen gerichteten Graphen H mit $V(H) = V(G) \cup \{s, t\}$, sodass H für jeden Knoten $v \in V(G)$ eine Kante (s, v) mit Kapazität m und eine Kante (v, t) mit Kapazität $m + 2\gamma - |\delta_G(v)|$ enthält.

4. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.
   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \leq 0} u(e). \qquad (*)$$
   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.
   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (2+2+1 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 30.11.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal