Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
1. Übung

1. Es sei $\mathcal{S}$ eine endliche Familie von endlichen (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Mengen. Eine Menge T ist eine *Transversale* von $\mathcal{S}$, falls eine Bijektion $\Phi : T \to \mathcal{S}$ existiert mit $t \in \Phi(t)$ für alle $t \in T$. Nehmen Sie an, dass $\mathcal{S}$ mindestens eine Transversale besitzt, und zeigen Sie, dass die Menge aller Transversalen von $\mathcal{S}$ die Menge der Basen eines Matroiden ist (des sogenannten *transversalen Matroids*). (4 Punkte)

2. Es seien $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2)$ zwei Matroide und $k \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Mengensysteme sind dann auch notwendigerweise Matroide? Begründen Sie Ihre Antworten.
   (a) $(E, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$
   (b) $(E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$
   (c) $(E, \mathcal{F}_1 \cap \{X \subseteq E \mid |X| \leq k\})$ (2+2+2 Punkte)

3. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:
   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$
   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so daß $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.
   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (4 Punkte)

4. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
   $(E, \mathcal{F})$ ist genau dann uniform, wenn es keine Kreise mit weniger als $r(E) + 1$ Elementen enthält. (2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 17.10.2019, vor der Vorlesung.