Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
2. Übung

1. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und sei k eine ganze Zahl mit $|E| \geq k > r(E)$. Sei $\mathcal{B}_k = \{X \subseteq E \mid |X| = k \text{ und } r(X) = r(E)\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_k$ die Menge der Basen eines Matroids ist. (4 Punkte)

2. Es sei E eine endliche Menge, und es seien $r_1 : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $r_2 : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ Rangfunktionen von Matroiden. Überprüfen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie unter diesen Voraussetzungen notwendigerweise auch Rangfunktionen von Matroiden sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) $r_a : 2^E \to \mathbb{Z}$ mit $r_a(X) = \max\{r_1(X), r_2(X)\}$ für alle Mengen $X \subseteq E$.

   (b) $r_b : 2^E \to \mathbb{Z}$ mit $r_b(X) = \max\{0, r_1(X) - 2\}$ für alle Mengen $X \subseteq E$. (2+2 Punkte)

3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für jedes Matroid $(E, \mathcal{F})$ mit Abschlussoperator $\sigma : 2^E \to 2^E$, $X \subseteq E$ und $x \in \sigma(X)$ gilt: $\sigma(X \cup \{x\}) = \sigma(X)$. (4 Punkte)

4. Seien C_1 und C_2 zwei Kreise eines Matroids $(C_1 \cup C_2, \mathcal{F})$ mit $C_1 \setminus C_2 = \{e\}$. Zeigen Sie, dass wenn C_3 ein Kreis des Matroids ist, $C_3 = C_1$ oder $(C_2 \setminus C_1) \subseteq C_3$ gilt. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 24.10.2019, vor der Vorlesung.