Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
3. Übung

1. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid. Es seien X und Y zwei disjunkte Teilmengen von E, so dass X in $(E, \mathcal{F})$ unabhängig ist und Y im dualen Matroid $(E, \mathcal{F}^*)$ unabhängig ist. Zeigen Sie, dass es dann eine Basis B von $(E, \mathcal{F})$ mit $X \subseteq B$ und eine Basis B^* von $(E, \mathcal{F}^*)$ mit $Y \subseteq B^*$ gibt, so dass B und B^* disjunkt sind. Gilt diese Aussage auch noch in jedem Fall, wenn $(E, \mathcal{F})$ nur ein Unabhängigkeitssystem ist? (4 Punkte)

2. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid, und es seien A und B zwei Teilmengen von E, die jeweils eine Basis enthalten und für die $|A| > |B|$ gilt. Muss es dann auch notwendigerweise ein $x \in A \setminus B$ geben, so dass $A \setminus \{x\}$ eine Basis enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass Unabhängigkeitsorakel und Basis-Obermengen-Orakel für Matroide polynomiell äquivalent sind. (4 Punkte)

4. Es sei k eine positive ganze Zahl. Ein k-Hypergraph ist ein Paar $H = (V(H), E(H))$ mit $E(H) \subseteq \{e \mid e \subseteq V(H), |e| = k\}$. Die 2-Hypergraphen sind also gerade die Graphen. Zu einem k-Hypergraph $H = (V(H), E(H))$ sei

$$\mathcal{F}_H = \{F \subseteq E(H) \mid \forall e, e' \in F : |e \cap e'| \leq 1\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $(E(H), \mathcal{F}_H)$ immer ein Unabhängigkeitssystem ist, aber im allgemeinen kein Matroid.

   (b) Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen k-Hypergraphen H mit Kantengewichten $c : E(H) \to \mathbb{R}_+$ eine Menge $F \in \mathcal{F}_H$ zu finden, die $\sum_{e \in F} c(e)$ maximiert. Welche Approximationsgüte (in Abhängigkeit von k) erreicht der Best-In-Greedy für dieses Problem? (2+3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 31.10.2019, vor der Vorlesung.