Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
6. Übung

1. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für jede unendliche Folge $G_1, G_2 \dots$ von Graphen gibt es zwei Indizes $i < j$, so dass G_i ein Minor von G_j ist.

   (b) Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen, die bezüglich Minorenbildung abgeschlossen ist, d.h. für jedes $G \in \mathcal{G}$ ist auch jeder Minor von G in $\mathcal{G}$ enthalten. Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{X}$ von Graphen, so dass $\mathcal{G}$ aus genau den Graphen besteht, die kein Element von $\mathcal{X}$ als Minor enthalten. (4 Punkte)

   Bemerkung: Diese Aussagen sind nicht nur äquivalent, sondern auch wahr. Ein Beispiel sind die planaren Graphen als Menge $\mathcal{G}$. Diese sind gegen Minorenbildung abgeschlossen, und die Menge $\mathcal{X}$ besteht in diesem Fall aus dem $K_{3,3}$ und dem K_5.

2. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine Unterteilung von G durch e, wenn $V(H) = V(G) \dot\cup \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G.

   (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H. Umgekehrt ist dies nicht der Fall.

   (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5.

   (c) Man folgere, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (2+3+1 Punkte)

3. Eine *Triangulation* ist ein planarer Graph zusammen mit einer planaren Einbettung, in der jedes Gebiet durch ein Dreieck berandet ist. Für die Knotenmenge V einer Triangulation sei eine Abbildung $l : V \to \{1, 2, 3\}$ gegeben. Eine Fläche der Triangulation heiße *dreifarbig*, wenn an ihren drei Eckknoten alle drei verschiedenen Knotenlabel 1, 2 und 3 vorkommen. Zeigen Sie, dass es dann eine gerade Anzahl von dreifarbigen Flächen geben muss. (3 Punkte)

4. Sei G ein planarer zweifach zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Sei Φ eine Einbettung von G. Zeigen Sie, dass man dann die Gebiete von Φ so mit zwei Farben färben kann, dass keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe haben. Dabei heißen zwei Gebiete benachbart, wenn es eine Kante gibt, die auf dem Rand beider Gebiete liegt. (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 21.11.2019, vor der Vorlesung.

Hinweis der Fachschaft Mathematik: Die Fachschaft Mathematik feiert am 28.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Di. 26.11., Mi. 27.11. und Do 28.11. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.