Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
7. Übung

1. Zeigen Sie, dass es in jedem Graphen G einen Weg mit mindestens $\chi(G) - 1$ Kanten geben muss. (3 Punkte)

2. Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 2$ einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, sodass, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so dass, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (2 Punkte)

3. Für einen einfachen Graphen G sei $t(G)$ die kleinste Zahl, für die es planare Graphen $G_1, \dots, G_{t(G)}$ gibt, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

   - $V(G_i) = V(G)$ $(i \in \{1, \dots, t(G)\})$,
   - $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t(G)} E(G_i)$.

   Ein Graph G ist also genau dann planar, wenn $t(G) = 1$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass es Graphen G mit $t(G) = 2$ und $\chi(G) = 8$ gibt.

   (c) Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den folgenden Wert an:

   $$\max\{\chi(G) \mid t(G) = 2\}.$$

   Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke.

   (2+2+2 Punkte)

4. Betrachten Sie sich den folgenden **falschen** Beweis des Vierfarbensatzes:

   Wir beweisen per Induktion in der Knotenzahl, dass für jeden planaren Graphen G gilt: $\chi(G) \leq 4$. Der Induktionsanfang $|V(G)| = 1$ ist trivial, sei also $|V(G)| > 1$, und wir betrachten eine feste planare Einbettung von G. Es sei x ein Knoten von G mit minimalem Grad. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $|\delta_G(x)| \leq 5$ gilt. Die Induktionsvoraussetzung liefert eine zulässige Knotenfärbung $f : V(G) \setminus \{x\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ von $G - x$. Wenn es eine Farbe aus $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt, die von f bei den Nachbarn von x nicht verwendet wird, können wir x mit einer solchen Farbe färben und haben so eine zulässige 4-Färbung von G. Also nehmen wir an, dass alle vier Farben bei den Nachbarn von x vorkommen. Insbesondere gilt also $|\delta_G(x)| \in \{4, 5\}$. Wie im Beweis des Fünffarbensatzes aus der Vorlesung seien die Nachbarn von x in Bezug auf die Einbettung zyklisch durchnumeriert (siehe

Figur 1 (a) für den Fall $|\delta_G(x)| = 5$). Ebenso betrachten wir wie in der Vorlesung für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ den Graphen $H_{i,j} = G[\{v \in V(G) \setminus \{x\} : f(v) \in \{i, j\}]$.

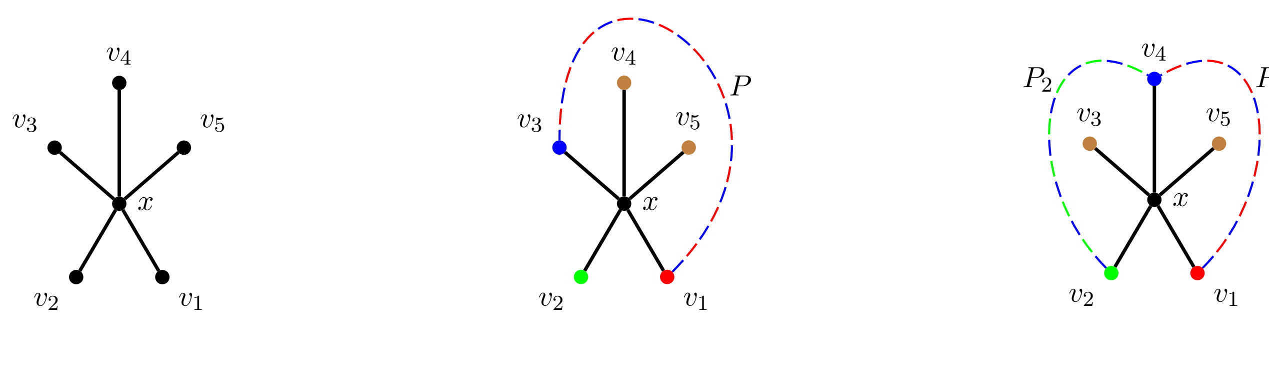
Sei zunächst $|\delta_G(x)| = 4$. Der Fall funktioniert analog zur Vorlesung: O.B.d.A. gelte $f(v_i) = i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Wenn es in $H_{1,3}$ keinen v_1-v_3-Weg gibt, können wir in der Zusammenhangskomponente von v_1 in $H_{1,3}$ die Farben 1 und 3 vertauschen. Anschließend ist die Farbe 1 für x übrig, und wir sind fertig. Wenn es aber einen v_1-v_3-Weg P in $H_{1,3}$ gibt, dann bildet P zusammen mit den Kanten $\{x, v_1\}$ und $\{x, v_3\}$ einen Kreis, der v_2 und v_4 trennt. Also gibt es in $H_{2,4}$ keinen v_2-v_4-Weg, weshalb wir in der Zusammenhangskomponente von v_2 in $H_{2,4}$ die Farben 2 und 4 vertauschen, wodurch wir die Farbe 2 für x übrig haben und wieder fertig sind.

Sei also $|\delta_G(x)| = 5$. Genau zwei der Nachbarn von x erhalten also unter f dieselbe Farbe. Diese können in der zyklischen Ordnung nebeneinander liegen oder nicht.

Wenn sie nebeneinander liegen, können wir o.B.d.A. $f(v_4) = f(v_5)$ annehmen. Es sei wieder $f(v_i) = i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Wie im Fall $|\delta_G(x)| = 4$ können wir annehmen, dass es in $H_{1,3}$ einen v_1-v_3-Weg P gibt (siehe Figur 1 (b)). Dann gibt es in $H_{2,4}$ aber weder einen v_2-v_4-Weg noch einen v_2-v_5-Weg. Also können wir in der Zusammenhangskomponente von v_2 in $H_{2,4}$ die Farben 2 und 4 vertauschen, wodurch wieder die Farbe 2 für x frei wird, und wieder sind wir fertig.

Es bleibt der Fall, dass die gleich-gefärbten Nachbarn von x in der zyklischen Ordnung nicht nebeneinander liegen. O.B.d.A. gelte $f(v_3) = f(v_5)$. Wieder gelte $f(v_i) = i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (also $f(v_5) = 3$). Es muss in $H_{1,4}$ einen v_1-v_4-Weg P_1 geben, sonst könnten wir wieder die Farbe 1 für x frei machen. Ebenso muss es in $H_{2,4}$ einen v_2-v_4-Weg P_2 geben (siehe Figur 1 (c)). Der Weg P_1 sorgt aber dafür, dass es in $H_{2,3}$ keinen v_2-v_5-Weg gibt, daher können wir in der Zusammenhangskomponente von v_5 in $H_{2,3}$ die Farben 2 und 3 vertauschen, wonach v_5 nicht mehr mit der Farbe 3, sondern mit der Farbe 2 gefärbt ist. Der Weg P_2 bewirkt, dass es in $H_{1,3}$ keinen v_1-v_3-Weg gibt, daher können wir in der Zusammenhangskomponente von v_3 in $H_{1,3}$ die Farben 1 und 3 vertauschen, wonach v_3 nicht mehr die Farbe 3, sondern die Farbe 1 hat. Die Farbe 3 kommt dann an den Nachbarn von x nicht mehr vor, wodurch wir wieder eine Farbe für x gewonnen haben.

Wo ist der Fehler im Beweis? (5 Punkte)



(a) (b) (c)

Abbildung 1: Aufgabe 4

Abgabe: Donnerstag, den 28.11.2019, vor der Vorlesung.