

Kombinatorik, Graphen, Matroide

9. Übung

1. Für einen einfachen ungerichteten Graphen G sei $\sigma(G)$ die Zahl der Möglichkeiten seine Kanten so zu orientieren, dass kein gerichteter Kreis entsteht. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\sigma(G) = |p_G(-1)|$, wobei p_G das chromatische Polynom von G sei. (5 Punkte)
Hinweis: Induktion in der Kantenzahl. Überlegen Sie sich dazu eine geeignete Rekursionsformel zur Berechnung von $\sigma(G)$.

2. Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit chromatischem Polynom $p_G(t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$. Zeigen Sie, dass G ein Kreis der Länge n ist. (4 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie die vorige Aufgabe.

3. Es sollen n Luftballons an k Kinder verteilt werden. Luftballons mit derselben Farbe sollen dabei nicht unterschieden werden. Wie viele Möglichkeiten einer solchen Verteilung gibt es, wenn

(a) alle Ballons rot sind,

(b) es r rote und $n-r$ blaue Ballons gibt,

(c) alle Ballons verschiedene Farben haben?

(1+1+1 Punkte)

4. Zeigen Sie durch kombinatorische Argumente, dass für Zahlen $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

(a)

$$\binom{mn}{2} = m \binom{n}{2} + n^2 \binom{m}{2}.$$

(b) Falls $m \leq n$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

(2+2 Punkte)