Kombinatorik, Graphen, Matroide
12. Übung

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke durch partielle Summation (im Ergebnis darf die harmonische Zahl H_n vorkommen, alle anderen Terme sollen durch eine konstante Anzahl von Rechenoperationen zu berechnen sein):

   (a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$.

   (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$. (2+2 Punkte)

2. Zeigen Sie mittels partieller Summation, wie $\sum_{k=1}^{n} H_k^2$ mit einer konstanten Anzahl von Rechenoperationen aus H_n und n berechnet werden kann. (4 Punkte)

3. Bestimmen Sie die Zusammenhangskoeffizienten der Basen $\{x^{\overline{n}}\}$ und $\{x^{\underline{n}}\}$, d.h. finden Sie Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$ (für $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \quad \text{und}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot x^{\overline{k}}$$

   Hinweis: Benutzen Sie, dass für komplexes x und y und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Vandermonde-Identität gilt, also

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

   (4 Punkte)

4. Es sei $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge mit $n! = \sum_{k \geq 0} b_k n^{\underline{k}}$. Zeigen Sie, dass die Werte b_k dadurch eindeutig bestimmt sind, und berechnen Sie sie. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 16.1.2020, vor der Vorlesung.