Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
13. Übung

1. (a) Zeigen Sie, dass für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt: $S_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$.

   (b) Folgern Sie aus (a), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $B_n = \frac{1}{e}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i^n}{i!}$. Dabei sei B_n definiert durch $B_0 = 1$ und $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$ für $n > 0$. (2+2 Punkte)

2. Berechnen Sie die erzeugende Funktion der harmonischen Zahlen. (3 Punkte)

   Hinweis: Benutzen Sie die aus die Analysis bekannte Gleichung $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n} = \log(1+z)$.

3. Es sei $C_0 = 0$, und für $n > 0$ sei C_n die Zahl der Möglichkeiten, ein Produkt $a_1a_2\ldots a_n$ zu klammern. Beispielsweise ist $C_4 = 5$, da es genau die 5 Möglichkeiten $((a_1a_2)a_3)a_4$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $a_1((a_2a_3)a_4)$, $a_1(a_2(a_3a_4))$, $(a_1(a_2a_3))a_4$ gibt.

   (a) Zeigen Sie, dass für $n > 1$ gilt: $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_kC_{n-k}$.

   (b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} C_nz^n$. (2+3 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie $G(z)^2$.

4. Bestimmen Sie die Zahl a_n der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{A, B, C, 1, 2, 3, 4\}$, in denen keine zwei Buchstaben direkt hintereinander stehen (d.h. zeigen Sie, wie a_n direkt aus n berechnet werden kann). (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie die Erzeugende Funktion $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$.

Abgabe: Donnerstag, den 23.1.2020, vor der Vorlesung.

Die Ergebnisse dieses Übungszettels haben keinen Einfluss mehr auf die Zulassung zur Klausur.