Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
1. Übung

1. Es sei $\mathcal{S}$ eine endliche Familie von endlichen (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Mengen. Eine Menge T ist eine *Transversale* von $\mathcal{S}$, falls eine Bijektion $\Phi : T \to \mathcal{S}$ existiert mit $t \in \Phi(t)$ für alle $t \in T$. Nehmen Sie an, dass $\mathcal{S}$ mindestens eine Transversale besitzt, und zeigen Sie, dass die Menge aller Transversalen von $\mathcal{S}$ die Menge der Basen eines Matroiden ist (des sogenannten *transversalen Matroids*).
(4 Punkte)

2. Sei G ein Graph, und sei $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen $X \subseteq V(G)$, für die ein kardinalitätsmaximales Matching existiert, das keinen Knoten in X überdeckt. Zeigen Sie, dass $(V(G), \mathcal{F})$ ein Matroid ist. (4 Punkte)

3. Es seien $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2)$ zwei Matroide und $k \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Mengensysteme sind dann auch notwendigerweise Matroide? Begründen Sie Ihre Antworten.
   (a) $(E, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$
   (b) $(E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$
   (c) $(E, \mathcal{F}_1 \cap \{X \subseteq E \mid |X| \leq k\})$ (2+2+2 Punkte)

4. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
$(E, \mathcal{F})$ ist genau dann uniform (d.h. es gibt ein k, sodass $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid |F| \leq k\}$), wenn es keine Kreise mit weniger als $r(E) + 1$ Elementen enthält. (2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 21.10.2021, vor der Vorlesung (im Hörsaal)