Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
2. Übung

1. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so dass $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (3 Punkte)

2. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und sei k eine positive ganze Zahl. Sei $r_k : 2^E \to \mathbb{Z}_+$ definiert durch $r_k(X) = \min\{k, r(X)\}$. Zeigen Sie, dass r_k die Rangfunktion eines Matroids ist. (3 Punkte)

3. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\sigma : 2^E \to 2^E$. Es seien $X, Y \subseteq E$ mit $\sigma(X) = X$ und $\sigma(Y) = Y$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Aus diesen Voraussetzungen folgt $\sigma(X \cap Y) = X \cap Y$.

   (b) Aus diesen Voraussetzungen folgt $\sigma(X \cup Y) = X \cup Y$. (2+2 Punkte)

4. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid, und es sei $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise von $(E, \mathcal{F})$. Außerdem sei $x \in E$. Betrachten Sie die folgenden Mengen $\mathcal{C}_i$. Geben Sie jeweils entweder einen Beweis dafür an, dass unter diesen Voraussetzungen C_i die Menge der Kreise eines Matroids ist, oder zeigen Sie durch ein Beispiel, dass dies nicht notwendigerweise der Fall ist.

   (a) $\mathcal{C}_1 = \{C \in 2^E \mid C \in \mathcal{C} \text{ und } x \notin C\}$

   (b) $\mathcal{C}_2 = \{C \in 2^E \mid (C \cup \{x\}) \in \mathcal{C}\}$

   (c) $\mathcal{C}_3 = \{C \in 2^E \mid x \in C \text{ und } (C \setminus \{x\}) \in \mathcal{C}\}$ (2+2+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 28.10.2021, vor der Vorlesung (im Hörsaal)