Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
3. Übung

1. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid, und es seien A und B zwei Teilmengen von E, die jeweils eine Basis enthalten und für die $|A| > |B|$ gilt. Muss es dann auch notwendigerweise ein $x \in A \setminus B$ geben, so dass $A \setminus \{x\}$ eine Basis enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

2. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid und $c : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $c(e) \neq c(e')$ und $c(e) \neq 0$ für alle $e, e' \in E$ mit $e \neq e'$. Zeigen Sie, dass dann sowohl das Maximierungsproblem als auch das Minimierungsproblem für $(E, \mathcal{F})$ eine eindeutige Lösung haben. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass das im allgemeinen nicht der Fall ist, wenn $(E, \mathcal{F})$ nur ein Unabhängigkeitssystem ist. (3 Punkte)

3. Es seien $w_1, \ldots, w_n$ und W positive ganze Zahlen und das Unabhängigkeitssystem $(E, \mathcal{F})$ sei gegeben durch $E = \{1, \ldots, n\}$ und

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid \sum_{j \in F} w_j \leq W\}.$$

Geben Sie den kleinsten möglichen Rangquotienten für $(E, \mathcal{F})$ an. Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass Unabhängigkeitsorakel und Basis-Obermengen-Orakel für Matroide polynomiell äquivalent sind. (2 Punkte)

5. Es sei k eine positive ganze Zahl. Für einen Graphen G sei

$$\mathcal{F}_G = \{F \subseteq E(G) \mid \Delta((V(G), F)) \leq k\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $(E(G), \mathcal{F}_G)$ immer ein Unabhängigkeitssystem ist, aber im allgemeinen kein Matroid.

   (b) Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ eine Menge $F \in \mathcal{F}_G$ zu finden, die $\sum_{e \in F} c(e)$ maximiert. Zeigen Sie, dass der Best-In-Greedy für dieses Optimierungsproblem eine Lösung findet, die höchstens um den Faktor 2 schlechter ist als eine optimale Lösung. (2+2 Punkte)

Bemerkung: $\Delta((V, E))$ bezeichnet den maximalen Knotengrad des Graphen (V, E).

Abgabe: Donnerstag, den 4.11.2021, vor der Vorlesung (im Hörsaal)