Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
4. Übung

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ein Matroid ist genau dann ein transversales Matroid (siehe Aufgabe 1 von Übungszettel 1), wenn es die Vereinigung von Matroiden ist, deren Basen jeweils Kardinalität 1 haben. (2 Punkte)

2. Es seien $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2)$ zwei Matroide. Und es sei X eine maximale partitionierbare Menge bezüglich $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2^*)$, also insbesondere sei $X = X_1 \dot{\cup} X_2$ mit $X_1 \in \mathcal{F}_1$ und $X_2 \in \mathcal{F}_2^*$. Außerdem sei $B_2^* \supseteq X_2$ eine Basis von $\mathcal{F}_2^*$. Zeigen Sie, dass $X \setminus B_2^*$ eine kardinalitätsmaximale Menge in $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ ist. (5 Punkte)

3. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit der Rangfunktion r. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $(E, \mathcal{F})$ hat genau dann k paarweise disjunkte Basen, wenn $kr(A) + |E \setminus A| \geq kr(E)$ für alle $A \subseteq E$ gilt.
   (b) In $(E, \mathcal{F})$ gibt es genau dann k unabhängige Mengen, deren Vereinigung gleich E ist, wenn $kr(A) \geq |A|$ für alle $A \subseteq E$ gilt. (3+3 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Zu einem gegebenen einfachen ungerichteten zusammenhängenden Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{N}$ soll eine gewichtsmaximale Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ gefunden werden, so dass $(V(G), E(G) \setminus F)$ zusammenhängend ist und $(V(G), F)$ kreisfrei. Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen Algorithmus gibt, dessen Laufzeit polynomiell in der Eingabegröße ist. (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 11.11.2021, vor der Vorlesung (im Hörsaal)