Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
5. Übung

Vorbemerkung: Bei diesem Übungszettel können Sie die Aussage benutzen, dass ein ungerichteter Graph genau dann planar ist, wenn er weder den K_5 noch den $K_{3,3}$ als Minor enthält, selbst wenn der Beweis dazu in der Vorlesung noch nicht abgeschlossen wurde.

1. Sei G ein gerichteter Graph, der für alle $v, w \in V(G)$ genau einen v-w-Weg enthält. Zeigen Sie, dass G eulersch ist. (3 Punkte)

2. Welches ist das kleinste n, so dass es einen nichtplanaren einfachen Graphen G mit n Knoten gibt, dessen Komplement $\bar{G}$ ebenfalls nicht planar ist? Dabei sei der Graph $\bar{G}$ definiert durch $V(\bar{G}) = V(G)$ und durch die Eigenschaft, dass zwei Knoten in $\bar{G}$ genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie in G nicht verbunden sind. (4 Punkte)

3. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. Wir sagen, dass H aus G durch Unterteilen von e entsteht, wenn $V(H) = V(G) \dot\cup \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G. Man zeige die folgenden Aussagen:

   (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H. Umgekehrt ist dies nicht der Fall.

   (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5. (2+3 Punkte)

   Bemerkung: Zusammen zeigen die beiden Aussagen also, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist.

4. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für jede unendliche Folge $G_1, G_2 \dots$ von Graphen gibt es zwei Indizes $i < j$, so dass G_i ein Minor von G_j ist.

   (b) Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen, die bezüglich Minorenbildung abgeschlossen ist, d.h. für jedes $G \in \mathcal{G}$ ist auch jeder Minor von G in $\mathcal{G}$ enthalten. Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{X}$ von Graphen, so dass $\mathcal{G}$ aus genau den Graphen besteht, die kein Element von $\mathcal{X}$ als Minor enthalten. (4 Punkte)

   Bemerkung: Diese Aussagen sind nicht nur äquivalent, sondern auch wahr. Ein Beispiel sind die planaren Graphen als Menge $\mathcal{G}$. Diese sind gegen Minorenbildung abgeschlossen, und die Menge $\mathcal{X}$ besteht in diesem Fall aus dem $K_{3,3}$ und dem K_5.

Abgabe: Donnerstag, den 18.11.2021, vor der Vorlesung (im Hörsaal)