Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
6. Übung

1. Der Graph G sei planar, aber jedes Hinzufügen einer Kante zwischen zwei in G nicht verbundenen Knoten führe zu einem nicht-planaren Graphen. Stimmt es dann, dass für je zwei Knoten u,v, die in G nicht verbunden sind, der Graph $(V(G), E(G) \cup \{\{u, v\}\})$ den K_5 als Minor enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

2. Sei G ein zusammenhängender Graph mit planarer Einbettung Φ. Es sei G^* der planare Dualgraph dazu. Zeigen Sie, dass die Zahl der aufspannenden Bäume für G und G^* gleich ist. (3 Punkte)

3. Eine *Triangulation* ist ein planarer Graph zusammen mit einer planaren Einbettung, in der jedes Gebiet durch ein Dreieck berandet ist. Für die Knotenmenge V einer Triangulation sei eine Abbildung $l : V \to \{1, 2, 3\}$ gegeben. Eine Fläche der Triangulation heiße dreifarbig, wenn an ihren drei Eckknoten alle drei verschiedenen Knotenlabel 1, 2 und 3 vorkommen. Zeigen Sie, dass es dann eine gerade Anzahl von dreifarbigen Flächen geben muss. (3 Punkte)

4. Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 2$ einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, so dass, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so dass, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (2 Punkte)

5. Sei G ein ungerichter, nicht vollständiger Graph. Zeigen Sie, dass es dann eine Partition $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2$ gibt, so dass $\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) > \chi(G)$ gilt. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 25.11.2021, vor der Vorlesung (im Hörsaal)