Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
7. Übung

1. Für einen einfachen ungerichteten Graphen G sei $t(G)$ die kleinste Zahl, für die es planare Graphen $G_1, \dots, G_{t(G)}$ gibt, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

   - $V(G_i) = V(G)$ $(i \in \{1, \dots, t(G)\})$,
   - $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t(G)} E(G_i)$.

   Ein Graph G ist also genau dann planar, wenn $t(G) = 1$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass es Graphen G mit $t(G) = 2$ und $\chi(G) = 8$ gibt.

   (c) Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den folgenden Wert an:

   $$\max\{\chi(G) \mid t(G) = 2\}.$$

   Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke. (2+2+2 Punkte)

2. Für einen ungerichteten Graph G und $t \in \mathbb{N}$ sei $p_G(t)$ die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von G mit den Farben $\{1, \dots, t\}$. Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G die Abbildung $p_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad $n = |V(G)|$ ist. Wie lautet der Koeffizient von t^n und wie der von t^{n-1}? (4 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst vollständige Graphen. Bei Graphen, in dem es zwei Knoten v und w gibt, die nicht durch eine Kante verbunden sind, können Sie sich dann überlegen, was passiert, wenn Sie v und w durch eine zusätzliche Kante verbinden oder $\{v, w\}$ kontrahieren.

3. Zeigen Sie (unter Benutzung des Vierfarbensatzes), dass die kantenchromatische Zahl eines 3-regulären planaren Graphen G ohne Brücken (d.h. ohne Kanten, deren Löschung die Zahl der Komponenten von G erhöhen würde), 3 ist. Gilt diese Aussage auch noch, wenn man statt 3-Regularität nur $\Delta(G) \leq 3$ fordert? (4 Punkte)

4. Sei G ein regulärer Graph mit ungerader Knotenzahl, und H entstehe aus G durch Löschen von höchstens $\frac{\Delta(G)}{2} - 1$ Kanten (insbesondere könnte $G = H$ gelten). Zeigen Sie, dass dann $\chi'(H) = \Delta(H) + 1$ gilt. (2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 2.12.2021, vor der Vorlesung (im Hörsaal)