Kombinatorik, Graphen, Matroide
8. Übung

1. Betrachten Sie ein regelmäßiges 250-Eck, von dessen Ecken genau 16 rot und alle anderen blau gefärbt sind. Zeigen Sie, dass es dann eine Drehung der 250-Ecks gibt, sodass alle roten Ecken auf alte Positionen von blauen Ecken gedreht werden. (3 Punkte)

2. Bei einem Tennisturnier spielen zwei Mannschaften mit je n Spielern in folgender Weise gegeneinander: Die Spieler beider Mannschaften sind jeweils von 1 bis n durchnumeriert. Zunächst spielen die beiden Spieler mit der Nummer 1 gegeneinander. Wer verliert, scheidet dann stets aus und wird in der folgenden Runde durch den Spieler seiner Mannschaft mit der nächsthöheren Nummer ersetzt. In der zweiten Runde spielt also der Sieger der ersten Runde gegen Spieler 2 der gegnerischen Mannschaft. Die Mannschaft, der als erster die Spieler ausgehen, d.h. die Mannschaft, die als erste n Spiele verloren hat, verliert das Turnier. Wie viele mögliche Turnierverläufe, d.h. Folgen von Siegen und Niederlagen gibt es bei diesem System? (3 Punkte)

3. Es sei $B_0 = 1$ und $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
(3 Punkte)

4. Zeigen Sie:
   (a) $s_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} s_{n,i}$,
   (b) $S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$. (2+2 Punkte)

5. Für $m, n \in \mathbb{N}$ definieren wir $X_n := \{1, \ldots, n\}$ und
$$A_{n,m} := \left| \left\{ \pi : X_n \to X_n : \pi \text{ Permutation und } |\{i \in X_n \setminus \{n\} : \pi(i) < \pi(i+1)\}| = m \right\} \right|.$$
Außerdem sei $A_{0,0} := 1$ und $A_{0,k} := 0$ (für $k > 0$). Zeigen Sie, wie man $A_{n,m}$ für $n > 0$ und $m > 0$ aus $A_{n-1,m-1}$ und $A_{n-1,m}$ durch eine konstante Anzahl von Rechenoperationen bestimmen kann. (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den **16.12.2021**, vor der Vorlesung (im Hörsaal)