

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

### 10. Übung

1. Berechnen Sie für  $x \neq 1$  die folgende Ausdrücke durch die Methode „Isolieren der Terme“ (d.h. finden Sie eine Darstellung, die eine Auswertung mit einer konstanten Anzahl von Rechenoperationen erlaubt):

(a)  $\sum_{k=1}^n kx^k$

(b)  $\sum_{k=1}^n k^2 x^k$  (2+2 Punkte)

2. Es sei  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = 1$  und  $T_n = -3T_{n-1} - 2T_{n-2}$  für  $n > 1$ . Geben Sie durch die Wahl geeigneter Summationsfaktoren eine Formel zur direkten Berechnung von  $T_n$  an. (4 Punkte)
3. Zeigen Sie mittels partieller Summation, wie  $\sum_{k=1}^n H_k^2$  mit einer konstanten Anzahl von Rechenoperationen aus  $H_n$  und  $n$  berechnet werden kann. (4 Punkte)
4. Bestimmen Sie die Zusammenhangskoeffizienten der Basen  $\{x^{\bar{n}}\}$  und  $\{x^{\underline{n}}\}$ , d.h. finden Sie Zahlen  $a_{n,k}$  und  $b_{n,k}$  (für  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), so dass für alle  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt:

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \quad \text{und}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \cdot x^{\bar{k}}$$

(4 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie, dass für komplexes  $x$  und  $y$  und  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  die Vandermonde-Identität gilt, also

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

**Abgabe:** Donnerstag, den 20.1.2022, vor der Vorlesung (im Hörsaal)

#### Veranstaltungshinweis der Gleichstellungs-AG:

Am 15.01.2022 von 15:00 bis 17:30 Uhr laden wir alle Mathematik- und Informatikstudentinnen<sup>1</sup> zu einem Online-Event zum Thema „Netzwerke und Karrierewege“ ein. Hier geht's zur Anmeldung: <http://www.hcm.uni-bonn.de/networking-career-paths/>

<sup>1</sup>Es sind alle Personen eingeladen, die weiblich, intersexuell, nicht-binär, transgender oder agender sind.