Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (5 Punkte)

2. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \leq 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (3+2+1 Punkte)

3. Es sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems mit ganzzahligem b, u und c. Es sei f ein b-Fluss in (G, u) und f^* ein kostenminimaler b-Fluss in (G, u).

   (a) Zeigen Sie, dass es, falls f nicht schon ein kostenminimaler b-Fluss ist, einen Kreis C im Residualgraph von f gibt, sodass
   $$c(f) - c(f') \geq \frac{1}{|E(G)|}(c(f) - c(f^*))$$
   gilt, wobei f' der Fluss sei, der aus f durch Augmentierung entlang C entstehe, und durch $c(f)$, $c(f')$ und $c(f^*)$ die Kosten der jeweiligen Flüsse angegeben werden.

   (b) Zeigen Sie, dass $O(|E(G)| \log(|E(G)|CU))$ Augmentierungen entlang von Kreisen, die für den aktuell betrachteten Fluss die Ungleichung aus (a) erfüllen, ausreichen, um aus einem beliebigen b-Fluss einen kostenminimalen b-Fluss zu berechnen, wobei $C := \max\{|c(e)| \mid e \in E(G)\}$ und $U := \max\{u(e) \mid e \in E(G)\}$ sei. (5 Punkte)

   Bemerkung: In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass man stets entlang eines Kreises augmentiert, der die größte Verbesserung erzielt, was aber in der Regel zu aufwändig ist.

b.w.

4. Wir betrachten ein Verfahren, das aus dem Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus entsteht, indem man stets um $\gamma' := \min\left\{ \min_{e \in E(P)} u_f(e), \quad \max\{b'(s), -b'(t)\} \right\}$ augmentiert. Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus bei ganzzahligen b-Werten und Kapazitäten ebenfalls nach höchstens $\frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} |b(v)|$ Augmentierungen terminiert. (4 Punkte)

Sie finden den aktuellen Übungszettel stets auf der Übungs-Seite der Vorlesung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws25/edm_uebung_ws25.html`

Abgabe: Donnerstag, den 18.12.2025, 16:00 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

`https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_3864991.html`